ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 7 **Dezember 1927** **Heft 6**

Inhalt:

	Seite
Vorträge der Kissinger Versammlung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik von W. Prager, Th. Pöschl, R. v. Mises, A. Betz, L. Prandtl, O. Föppl, F. Bernstein, H. Pollaczek-Geiringer, E. J. Gumbel, K. Popoff, G. Hamel, F. Noether, F. Rehbock, M. Herzberger. .	421
Hauptaufsätze. K. Körner: Zur statischen Berechnung der Achsenregler	457
F. Löbell: Ein Beitrag zur Bestimmung der Deformationen einer elastischen Membran unter dem Einfluß gegebener äußerer Kräfte .	463
A. Huber: Ueber eine Randwertaufgabe bei der verallgemeinerten Wärmeleitungs-Gleichung .	469
N. Bernstein: Analyse aperiodischer trigonometrischer Reihen	476
C. v. Dobbeler: Vierskalige Nomogramme . .	485
Kleine Mitteilungen. Olsson und Faxén: Laminare Bewegung zäher Flüssigkeit in logarithmischen Spiralen. — Eck: Charakteristische Eigenschaften von Membranblechen für Regelvorrichtungen und Instrumente. — Nowakowski: Ein Verfahren zur harmonischen Analyse	496
Buchbesprechungen. Sachs und Fiek: Der Zugversuch. — Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften. — Merkel: Die Grundlagen der Wärmeübertragung. — Geiger: Mechanische Schwingungen und ihre Messung. — Bieberbach: Einführung in die konforme Abbildung. — Du Pasquier: Le Calcul des Probabilités. — Weiter eingegangene Bücher	504
Nachrichten	506
Zuschriften an den Herausgeber	507

Vorträge der Kissinger Versammlung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Für die wissenschaftliche Tagung in Kissingen waren fünfzehn Vorträge angemeldet. Von diesen mußte der eine von Hrn. M. Grübler über den Gewichtsbegriff wegen Erkrankung des Vortragenden ausfallen. An seiner Stelle wurde von Hrn. H. Reißner eine Diskussion über die Festsetzung der Definition von Kraft und Masse eingeleitet. Der folgende Bericht über die vierzehn Vorträge besteht aus den Mitteilungen der Vortragenden selbst. Diejenigen Vorträge, die anderwärts zur Veröffentlichung gelangen, sind nur in kurzen Auszügen, die anderen in vollem Wortlaut wiedergegeben.

1. Die Formänderungen von Raumfachwerken.

Von **WILLY PRAGER** in Darmstadt.

Der Ingenieur ist gewohnt, räumliche Gebilde durch Grund- und Aufriß darzustellen. Wenn auch dieses Abbildungsverfahren nicht immer so anschauliche Bilder liefert, wie andere, so hat es vor diesen doch den Vorzug einfacherer Konstruktion. Es ist nun eigenartig, daß gerade dieses sonst so brauchbare Verfahren sich zur graphischen Behandlung von Aufgaben aus der Statik des Raumfachwerks nicht eignet, und daß deshalb die graphischen Methoden in der räumlichen Statik noch lange nicht die Bedeutung erlangt haben, die sie in der ebenen Statik besitzen. Benjamin Mayor, Professor in Lausanne, stellte sich als erster die Aufgabe, ein Abbildungsverfahren zu ersinnen, das gerade für den genannten Zweck geeignet ist. In seinem 1910 erschienenen Buche »Statique graphique des systèmes de l'espace« entwickelt er ein Verfahren, das zu einer einfachen und übersichtlichen Ermittlung der Stabkräfte eines Raumfachwerks führt. Hr. v. Mises hat dieses Verfahren wesentlich vereinfacht und auf allgemeine räumliche Kräftesysteme ausgedehnt [1]). In meiner Dissertation [2]) stellte ich dem Mayor-Misesschen Verfahren ein ihm dual ent-

[1]) »Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme«, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1916.

[2]) »Beitrag zur Kinematik des Raumfachwerks«, diese Zeitschr. 1926; in anderem Zusammenhang findet sich dieses zweite Verfahren bereits bei v. Mises »Anwendung der Motorrechnung«, diese Zeitschr. 1924.

sprechendes zur Seite; die gleichzeitige Anwendung beider Verfahren ermöglicht die Lösung einer Reihe von Aufgaben aus der Statik des Raumfachwerks. Zunächst möchte ich die beiden Abbildungsverfahren kurz schildern, dann auf eine Zuordnung von Raumfachwerken und ebenen Stabwerken hinweisen, deren Entdeckung man Hrn. Mayor verdankt, und schließlich ein Verfahren zur Berechnung der Nebenspannungen im Raumfachwerk angeben.

Beide Verfahren bilden freie Vektoren durch gebundene ab. Da nun ein freier Vektor durch drei Stücke, seine Komponenten, bestimmt ist, ein gebundener dagegen durch fünf, drei Komponenten und zwei Momente, so müssen den zur Abbildung verwendeten gebundenen Vektoren gewisse Bedingungen auferlegt werden, damit die beiden aufeinander abzubildenden Mengen von der gleichen Dimension sind. Als solche Bedingungen kommen in Betracht:

1. die zur Abbildung zugelassenen gebundenen Vektoren sind in einer Ebene (x-y-Ebene) enthalten (Mayor-Misessche Abbildung),
2. die zur Abbildung zugelassenen gebundenen Vektoren gehen durch einen Punkt ($x = y = 0,\ z = \infty$).

Im übrigen werden die beiden Abbildungsverfahren durch folgende Festsetzungen näher bestimmt:

1. Dem freien Vektor $\overline{P}$ mit den Komponenten X, Y, Z entspricht als »erstes Bild« der gebundene Vektor $\overline{P}'$ mit den Komponenten:

$$X' = X, \qquad Y' = Y, \qquad Z' = 0,$$

der in bezug auf die Koordinatenachsen die Momente hat:

$$M_x' = 0, \qquad M_y' = 0, \qquad M_z' = c \cdot Z,$$

wo c eine beliebig gewählte Länge, die sog. Abbildungskonstante ist.

2. Dem freien Vektor $\overline{P}$ mit den Komponenten X, Y, Z entspricht als »zweites Bild« der gebundene Vektor $\overline{P}''$ mit den Komponenten:

$$X'' = 0, \qquad Y'' = 0, \qquad Z'' = Z,$$

der in bezug auf die Koordinatenachsen die Momente hat:

$$M_x'' = c \cdot X, \qquad M_y'' = c \cdot Y, \qquad M_z'' = 0,$$

wo c wiederum die Abbildungskonstante ist. Während das erste Bild eines Vektors in der als Bildebene zu verwendenden x-y-Ebene enthalten ist, steht das zweite Bild senkrecht zu dieser Ebene, seine Lage ist bestimmt durch Angabe seines Schnittpunkts mit der Bildebene, des sog. Bildpunktes.

Aus den Definitionsgleichungen für die beiden Abbildungen erkennt man, daß dem Gleichgewicht von Kräften, die im Raume an einem Punkt angreifen, das Gleichgewicht ihrer ersten oder zweiten Bildkräfte entspricht. Ferner ermöglichen die Abbildungen eine einfache Bestimmung des inneren oder äußeren Produkts zweier durch ihre Bilder gegebenen Vektoren. Bedeutet $\overline{P}$ einen Vektor, $\overline{P}'$ und $\overline{P}''$ sein erstes und zweites Bild und $\overline{r}'$ bzw. $\overline{r}''$ den vom Koordinatenursprung nach einem Punkt von $\overline{P}'$ bzw. nach dem Bildpunkt von $\overline{P}$ gezogenen Vektor, so gilt:

$$\overline{P}_1 \cdot \overline{P}_2 = \frac{1}{c}(\overline{P}_2'' \times \overline{P}_1') \cdot (\overline{r}_1' - \overline{r}_2'') \qquad \text{und} \qquad \overline{P}_3' = \frac{1}{c}(\overline{P}_2'' \cdot \overline{P}_1'') \cdot (\overline{r}_1'' - \overline{r}_2''),$$

wo $\overline{P}_3$ das äußere Produkt der Vektoren $\overline{P}_1$ und $\overline{P}_2$ ist. Ist $\overline{n}$ ein Einheitsvektor senkrecht zur Bildebene, so sind die beiden Abbildungsarten bestimmt durch:

$$^1/_c(\overline{P}' \times \overline{r}') + \overline{P}' = \overline{P}, \qquad \overline{P}' \cdot \overline{n} = 0$$

und

$$^1/_c(\overline{P}'' \times \overline{r}'') + \overline{P}'' = \overline{P}, \qquad \overline{P}'' \times \overline{n} = 0.$$

Aus diesen Definitionsgleichungen können die obigen Beziehungen leicht erhalten werden.

Der Anwendung der Abbildungsverfahren auf Raumfachwerke soll als Beispiel das einfachste Raumfachwerk, ein dreistäbiges Bockgerüst, zugrunde gelegt werden. Von drei festen Gelenken aus gehen Stäbe nach einem vierten Punkt, in dem sie gelenkig miteinander verbunden sind. Wir bilden die Stäbe nach der ersten Art ab; die Bildstäbe werden sich nicht in einem Punkt schneiden. Um zwischen ihnen eine dem Knoten 4 des Raumfachwerkes entsprechende materielle Verbindung zu schaffen, führen wir eine starre Scheibe IV ein, an der die Bildstäbe gelenkig befestigt sind; die anderen Endpunkte I, II, III der Bildstäbe sind als feste Gelenke zu betrachten. Wir erhalten so ein

ebenes Stabwerk als Bild des Raumfachwerks, und zwar ist die Zuordnung nicht eindeutig, da die Bildstäbe in ihren Trägergeraden beliebig verschoben werden dürfen. Dem Gleichgewicht der Kräfte am Knoten 4 des Raumfachwerks entspricht das Gleichgewicht der in einer Ebene enthaltenen Bildkräfte an der Scheibe IV des Bildstabwerks. Es ergibt sich so eine einfache Bestimmung der Stabkräfte des Raumfachwerks aus einem Kräfteplan für das ebene Bildstabwerk.

Eine Verlängerung ΔL_{14} des Stabes $\overline{L}_{14}$ bedingt eine Verschiebung $\overline{V}_4$ des Knotens 4. Man kann die Verschiebung in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine parallel, die andere senkrecht zum Stabe $\overline{L}_{14}$ gerichtet ist; jene rührt von der Verlängerung, diese von der Drehung des Stabes her, und zwar ist:

$$\overline{V}_4 \cdot \overline{L}_{14} = L_{14} \cdot \Delta L_{14} \qquad \text{und} \qquad \overline{V}_4 \times \overline{L}_{14} = L_{14}^2 \cdot \overline{\psi}_{14},$$

wo $\overline{\psi}_{14}$ der Größe und Achse der Drehung in üblicher Weise bestimmende Vektor ist. Entsprechende Gleichungen gelten für die beiden anderen Stäbe, sie ermöglichen die Bestimmung der Verschiebung $\overline{V}_4$ und der zur Berechnung der Nebenspannungen erforderlichen Stabdrehwinkel. Den Stäben L_{ik}' des Bildstabwerks wollen wir Längenänderungen $\Delta L_{ik}'$ zuschreiben, derart, daß:

$$L_{ik}' \cdot \Delta L_{ik}' = L_{ik} \cdot \Delta L_{ik}$$

ist. Infolge dieser Längenänderungen erfährt die Scheibe IV eine unendlich kleine Bewegung, die als Drehung um einen bestimmten Pol aufgefaßt werden kann. Eine nähere Untersuchung lehrt, daß der diese Drehung darstellende gebundene Vektor nach Multiplikation mit der Abbildungskonstanten c mit dem zweiten Bild der Verschiebung $\overline{V}_4$ identisch ist. Ein Verschiebungsplan für das Bildstabwerk führt also auch zur Bestimmung der Verschiebungen des Raumfachwerks und ermöglicht die Ermittlung der Stabdrehwinkel.

Bisher wurde vorausgesetzt, daß die Stäbe am Knoten 4 gelenkig miteinander verbunden sind. Wir wollen diese Annahme nun fallen lassen, dagegen die Punkte 1, 2 und 3 weiterhin als Gelenke voraussetzen. Außer den axialen Stabkräften treten dann Biegemomente auf, die Nebenspannungen verursachen. Wir führen für jeden Fachwerkstab ein Koordinatensystem mit dem Knoten 4 als Ursprung ein, dessen Achsen mit der Stabachse und den beiden Hauptachsen des Stabquerschnitts zusammenfallen. Infolge der Deformation des Fachwerks erfährt jedes dieser Koordinatensysteme eine Drehung, und da die drei Stäbe am Knoten 4 steif miteinander verbunden sind, müssen die Drehungen identisch sein. Wir bezeichnen diese den drei Stäben gemeinsame Drehung als »Knotendrehwinkel $\overline{\varphi}_4$«. Betrachten wir nun die Deformation des Stabes $\overline{L}_{14}$ näher. Die Drehung $\overline{\varphi}_4$ des Koordinatensystems ξ_{14}, η_{14}, ζ_{14} läßt sich in drei Komponenten zerlegen, von denen die erste $\overline{\psi}_{14}$ von der Längenänderung der Stäbe, die zweite $\overline{\tau}_{14}$ von der Biegung des Stabes $\overline{L}_{14}$ herrührt und die dritte $\overline{\vartheta}_{14}$ eine Drehung um die Stabachse (ξ_{14}) ist; infolge der gelenkigen Lagerung des Punktes 1 besteht gegen eine solche Drehung ja kein Widerstand. In erster Annäherung können die Stabkräfte als von den Nebenspannungen unbeeinflußt angesehen werden, so daß wir den ersten Anteil von $\overline{\varphi}_4$ als Stabdrehwinkel $\overline{\psi}_{14}$ aus dem Verschiebungsplan für das statisch bestimmte Fachwerk entnehmen können. Der Zusammenhang zwischen dem zweiten Anteil $\overline{\tau}_{14}$ und dem ihn erzeugenden Moment $\overline{M}_{14}$ ist durch einen Tensor Θ_{14} gegeben, der die Achsen ξ_{14}, η_{14} und ζ_{14} zu Hauptachsen und für sie die Werte 0, ${}_\eta J_{14}$ ${}_\zeta J_{14}$, hat, und zwar ist:

$$\overline{M}_{14} = \frac{3\,E_{14}}{L_{14}} \cdot \Theta_{14} \cdot \overline{\tau}_{14}$$

(E Elastizitätsmodul des Stabmaterials; ${}_\eta J$ und ${}_\zeta J$ Hauptträgheitsmomente des Stabquerschnitts). Entsprechende Gleichungen gelten für jeden Stab. Aus Gleichgewichtsgründen muß die Summe der Momente am Knoten 4 verschwinden, also:

$$\sum_{i=1}^{i=3} \frac{E i_4}{L_{i4}} \cdot \Theta_{i4} \cdot \overline{\tau}_{i4} = 0$$

sein. Nun ist aber:

$$\overline{\tau}_{i4} = \overline{\varphi}_4 - \overline{\psi}_{i4} - \overline{\vartheta}_{i4} \qquad \text{und} \qquad \Theta_{i4} \cdot \overline{\vartheta}_{i4} = 0,$$

so daß die Gleichgewichtsbedingung die Form annimmt:

$$\sum_{i=1}^{i=3} \frac{E_{i4}}{L_{i4}} \Theta_{i4} \cdot (\bar{\varphi}_4 - \bar{\psi}_{i4}) = 0,$$

woraus der Knotendrehwinkel $\bar{\varphi}_4$ und damit die Biegemomente und Nebenspannungen zeichnerisch oder rechnerisch ermittelt werden können.

Selbstverständlich können die hier zwecks Zeitersparnis nur an einem einfachen Beispiel geschilderten Methoden auf allgemeinere Raumfachwerke übertragen werden. Es ist dann im allgemeinen auch noch der Torsionswiderstand der Stäbe zu berücksichtigen; ferner treten in der Gleichgewichtsbedingung für einen Knoten i außer φ_i noch die Knotendrehwinkel aller Knoten auf, die mit i durch einen Stab verbunden sind. Um die Gleichungen voneinander unabhängig zu machen, kann man in erster Näherung diese Knotendrehwinkel durch die entsprechenden Stabdrehwinkel ersetzen. Die Untersuchung der Konvergenz dieses Verfahrens ist noch nicht abgeschlossen. Die beiden Abbildungsverfahren erweisen sich als sehr geeignet zur Behandlung sämtlicher Fragen aus der Statik des Raumfachwerks. 845, 1

2. Zur Theorie des Druckversuchs für zylindrische Körper.

Von **TH. PÖSCHL** in Prag.

Für die Lösung von drehsymmetrischen elastischen Problemen erweist sich die konsequente Verwendung von Zylinderkoordinaten — als den Problemen organisch angepaßt — von besonderem Nutzen. Man wird dabei auf die von Love (Theorie der Elastizität, Deutsche Ausgabe von A. Timpe, S. 314 ff.) gegebene Darstellung geführt, deren Vorteile jedoch noch keineswegs ausgeschöpft sind. Der Verwendung dieser Lösungsform steht vor allem der Umstand hindernd im Wege, daß aus der dort gegebenen Ableitung nicht ersichtlich ist, wie sie mit anderen bekannten Ansätzen zusammenhängt; weiter wird es als Mangel empfunden, daß eine geometrische Deutung dieser Ausdrücke bisher fehlt, und schließlich auch, daß eine Uebertragung auf andere drehsymmetrische Koordinaten, etwa auf Kugelkoordinaten oder auf allgemein krummlinige Koordinaten in der Meridianebene nicht auf Ausdrücke von ähnlicher Einfachheit führt.

Was den ersten Punkt anlangt, so ist leicht zu zeigen, daß sich der von Love gegebene Ansatz einfach zur Spezialisierung des von Maxwell angegebenen auf den drehsymmetrischen Fall ergibt. Für die Spannungs- und Verzerrungsgrößen erhält man unmittelbar aus den Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen die folgenden Ausdrücke:

$$\widehat{r\,r} = \nu\, \Delta\, \psi - \psi_{rr}, \quad \widehat{\varphi\,\varphi} = \nu\, \Delta\, \psi - 1/r\, \psi_r, \quad \widehat{z\,z} = (2-\nu)\, \Delta\, \psi - \psi_{zz},$$

$$\widehat{r\,z} = -\Phi_{rz} = \frac{1}{r} \int \left\{ \left[r \frac{\partial}{\partial z} [\psi_{zz} - (2-\nu)\, \Delta\, \psi] \right] d\,r - \left[r \frac{\partial}{\partial r} [\psi_{zz} - (1-\nu)\, \Delta\, \psi] \right] d\,z \right\},$$

$$U = -\frac{1+\nu}{E} \cdot \psi_r, \quad W = \frac{1+\nu}{E} \int \{ [-2\,\Phi_{rz} + \psi_{rz}]\, d\,r + [2\,(1-\nu)\, \Delta\, \psi - \psi_{zz}]\, d\,z \},$$

die bei Love durch die Substitution $\psi = \frac{\partial \chi}{\partial z}$ integrallos geschrieben sind. Die Funktion ψ genügt der biharmonischen Differentialgleichung $\Delta\, \Delta\, \psi = 0$ und die in den vorstehenden Formeln auftretenden Integrale erweisen sich eben wegen dieser Gleichung und wegen der Bedingung $\Delta\, \Phi = \Delta\, \psi$ als vollständige.

Für den Sonderfall, daß die Lösung des elastischen Problems von einem Potential abhängt (und nicht von einem Bipotential), ψ also schon der Gleichung $\Delta\, \psi = 0$ genügt, werden die vorhergehenden Ausdrücke besonders einfach und lauten:

$$\widehat{r\,r} = -\psi_{rr}, \quad \widehat{\varphi\,\varphi} = -1/r\, \psi_r, \quad \widehat{z\,z} = -\psi_{zz}, \quad \widehat{r\,z} = -\psi_{rz}, \quad U = -\frac{1+\nu}{E} \psi_r, \quad W = -\frac{1+\nu}{E} \psi_z.$$

Als Beispiel für die dadurch erzielte außerordentliche Vereinfachung sei auf das bekannte Problem des zylindrischen Stempels hingewiesen, der auf eine elastische Ebene drückt. Dieses Problem wird unmittelbar durch die Potentialfunktion

$$\psi = -\frac{\varkappa}{2\,a\,\pi} \int_0^\infty \frac{\sin a\,\alpha}{\alpha^2} J_0(\alpha\, r)\, e^{-\alpha z}\, d\,\alpha$$

aufgelöst, die in ganz ähnlicher Form auch in der gewöhnlichen Darstellung (siehe etwa Frank-Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, II. Bd.

S. 669 ff.) die Lösung bestimmt. Die Spannungs- und Verschiebungsgrößen sind dann einfach durch die in den vorhergehenden Gleichungen angeschriebenen Ableitungen gegeben. Auch die Berücksichtigung der endlichen Dicke der elastischen Schichten auf ebener Unterlage ist durch Hinzunahme eines zweiten, spiegelbildlich angeordneten Zylinders mit denselben Hilfsmitteln ausführbar.

Das dem »Druckversuch« zugrunde liegende elastische Problem besteht darin, die Spannungen und Verzerrungen in einem zwischen zwei starren und vollkommen rauhen Druckplatten eingespannten prismatischen oder zylindrischen Körpers zu bestimmen, dessen Seitenflächen spannungsfrei sind. In den älteren Arbeiten (von Filon, Girtler, Myß u. a.) wird dieses Problen als regulär aufgefaßt und die Lösung aus den bekannten trigonometrischen Sonderlösungen und Potenzreihen aufgebaut. Die Lösungen dieser Art können durch die oben angegebenen Hilfsmittel und durch Heranziehung von polynomischen und trigonometrischen Potentialen und Bipotentialen bedeutend vereinfacht werden; sie ermöglichen zwar, das Haften des Stoffes an den Druckplatten und die Spannungsfreiheit der Seitenflächen exakt zu berücksichtigen, sie vermögen aber nicht, die Bedingung des Ebenbleibens der Druckplatten zu erfüllen, an welchen vielmehr bei ihnen parabolische Einsenkungen auftreten.

Diese Bedingung des Ebenbleibens der Druckplatten verlangt die Einführung von singulären Lösungen von der Art, wie dies für prismatische Körper durch v. Kármán und Knein (Aachener Abhandlungen Heft 7) geschehen ist. Auch dieser Ansatz kann mit Hilfe der Potentialtheorie vereinfacht und auf den zylindrischen Fall erweitert werden, wozu die Einführung von Einzelkräften an den Ecken (bzw. Druckrändern) und von geeigneten über die Druckflächen verteilten Kräften, die an den Ecken unendlich werden müssen, erforderlich ist. Potentiale dieser Art, die von Appell, Sommerfeld u. a. angegeben wurden, sind in anderen Teilen der Physik bereits verwendet worden.

Eine ausführlichere Darstellung dieser Entwicklungen wird später gegeben werden.

845, 2

3. Bemerkungen zur Hydrodynamik.

Von **R. v. MISES** in Berlin.

Die folgenden Bemerkungen beziehen sich vor allem auf die Theorie der sog. »laminaren Grenzschicht« und suchen einerseits diese Theorie der allgemeinen exakten Theorie der zähen Flüssigkeiten einzuordnen, andrerseits ihr eine Gestalt zu geben, die die tatsächliche Durchführung von genauen Berechnungen erleichtert oder erst ermöglicht.

1. Grenzübergang zu $R \to \infty$. Wir beschränken unsere Betrachtung auf die ebene stationäre Bewegung und lassen nur Kräfte zu, die ein Potential haben, so daß ihr Einfluß bei entsprechender Definition der Druckgröße p schon im Druckgefälle zum Ausdruck kommt. Man hat dann, wenn μ die Dichte und Z die Zähigkeitszahl (sog. kinematischer Reibungskoeffizient, Dimension cm²/sec) bezeichnet, für die Komponenten v_x, v_y der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ die Gleichungen von Navier und Stokes:

$$\left.\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + Z\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) \\ \ldots\ldots &= -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (1).$$

Man kann sie, wie bekannt, unwesentlich umformen durch Einführung sog. »dimensionsloser« Größen. Faßt man nämlich eine bestimmte Anordnung ins Auge — wie sie etwa die Abb. 1 darstellt, die eine Strömung zwischen zwei festen Wänden um ein innenliegendes Hindernis herum bei gegebener Geschwindigkeitsverteilung im Eintritt und Austritt andeuten soll — so kann man irgend eine der Längenabmessungen, z. B. die Anfangsbreite a, und irgend eine der gegebenen Geschwindigkeiten, z. B. die in der Abb. mit c bezeichnete, herausgreifen und dann alle Längen mit der Maßeinheit a, alle Geschwindigkeiten mit dem Maß c messen. Setzt man also fest, daß in unseren Gleichungen x, y nicht mehr die wirklichen

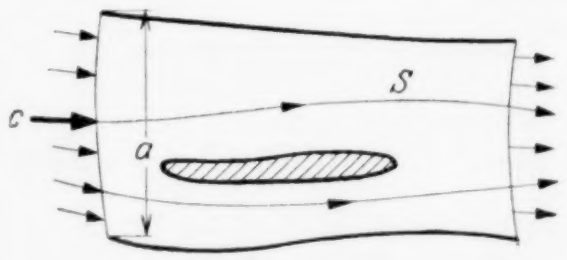


Abb. 1.

Koordinaten, sondern die durch a dividierten, gleicherweise v_x, v_y die durch c dividierten Geschwindigkeitskomponenten bezeichnen, wozu dann noch gehört, daß p gleich dem durch c^2 dividierten Druck ist, so ändert sich an den drei Gleichungen, die wir angeschrieben haben, nichts als daß an Stelle von Z der Quotient $Z:ac$ oder der reziproke Wert von

$$R = \frac{c\,a}{Z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

der sog. Reynoldsschen Zahl, tritt. Dies hat folgende Bedeutung. Man kann neben der zuerst ins Auge gefaßten Anordnung eine mehrfach unendliche Folge von Anordnungen betrachten, die in ihren äußeren Bedingungen der ersten ähnlich sind. Das soll heißen: Man denkt sich alle Begrenzungen, also die festen Wände, die Gestalt des Hindernisses und die beiden Abschlußlinien geometrisch ähnlich verändert, die Aus- und Eintrittsgeschwindigkeiten an entsprechenden Punkten der letzteren in der Richtung erhalten und mit einem gemeinsamen Faktor multipliziert, endlich einen beliebigen Wert für Z gewählt. Alle so entstandenen Strömungen wollen wir als äußerlich ähnlich bezeichnen, jede von ihnen ist durch die drei Zahlen a, c, Z charakterisiert. Die Gleichungen besagen nun, daß äußerlich ähnliche Bewegungen im ganzen Innern ähnlich verlaufen, wenn für sie $ac:Z$ gleichen Wert hat, daß man also alle Erscheinungen übersieht, wenn man nur eine der drei Größen von 0 bis ∞ wachsen läßt. Praktisch wird man am leichtesten die Geschwindigkeiten variieren, weshalb man R als Maß der (auf Längen- und Zähigkeits-Einheit) »reduzierten Geschwindigkeit« ansehen kann. Gedanklich ist es vielleicht einfacher, sich vorzustellen, daß nur Z geändert wird, so daß der Uebergang $R\to\infty$ ein Uebergang zu verschwindend kleiner Zähigkeit wird.

Hr. Prandtl hat in seinem bekannten Vortrag von 1904 [1]) zum erstenmal einen solchen Grenzübergang zu $R\to\infty$ ausgeführt und dabei nur die engere Umgebung einer festen Führung, der Wand oder des eingebauten Hindernisses — die sog. Grenzschichte — betrachtet. Bevor ich darauf eingehe, den Prandtlschen Ansatz etwas verallgemeinert und unter etwas anderen Voraussetzungen abzuleiten, muß ich ganz kurz die physikalische Bedeutung des Ueberganges zu $R\to\infty$ erörtern. Man kann hier historisch vier verschiedene Auffassungen unterscheiden. Die älteste, die heute kaum noch Anhänger hat, ist die, daß die Navier-Stokesschen Gleichungen der stationären Bewegung für alle R schlechthin gültig sind, daß man also durch ihre Integration bei jedem noch so großen R ein zutreffendes Bild von dem wirklichen Strömungsvorgang erhält. Die zweite Auffassung, die etwa bis 1921 herrschend war, besagt: Es gibt zwar eine obere Grenze für R, den »kritischen« Wert der reduzierten Geschwindigkeit, von dem an zumindest die stationären Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen im Innern der Strömung versagen; aber in der Grenzschichte, in der Nähe der Wand, gilt immer der Ansatz (1). Im Jahre 1921 sind Prandtl und v. Kármán einen Schritt weiter gegangen: Es gibt auch für die Grenzschichte einen kritischen R-Wert, von dem an auch für sie der Ansatz (1) ungültig wird, nur liegt dieser kritische Wert vermutlich höher als der für die Strömung im Innern [2]). Davon ist nicht mehr viel verschieden eine vierte Auffassung, die man dahin formulieren kann, daß kein ausgesprochener Gegensatz zwischen Randschichte und übriger Strömung besteht, sondern daß die stationäre Bewegung, die der Ansatz (1) liefert, oberhalb eines gewissen R tatsächlich nicht mehr der Wirklichkeit entspricht. Aber selbst wenn man sich auf diesen extremsten Standpunkt stellt, kann man der Betrachtung des Grenzüberganges $R\to\infty$ noch doppelte Bedeutung zuerkennen. Erstens ist es theoretisch von Interesse, zu welchen Folgerungen eine Theorie führt, die für kleine R jedenfalls eine sichergestellte physikalische Realität besitzt, und zweitens liegt zumindest in gewissen Fällen der kritische R-Wert so hoch, daß die für unendliches R berechnete Strömungsform eine gute Annäherung für das liefert, was innerhalb der Gültigkeitsgrenze der Theorie wirklich eintritt.

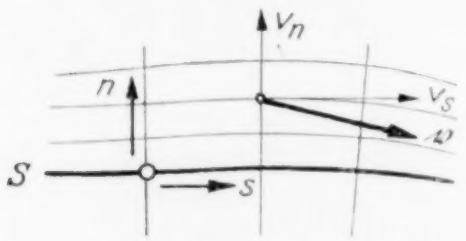


Abb. 2.

Wir wollen jetzt, etwas abweichend von der ursprünglichen Prandtlschen Ueberlegungsweise eine ganz beliebige Stromlinie S aus dem Innern der Strömung betrachten (Abb. 2). Wenn wir nicht gerade annehmen, daß sie irgendwo unendlich große Krümmung besitzt, so können wir in ihrer Umgebung ein krummliniges, aber rechtwinkliges

[1]) Neu abgedruckt in: Vier Abhandl. zur Hydrodynamik u. Aerodynamik von L. Prandtl u. A. Betz, Göttingen 1927.

[2]) Vergl. etwa Th. v. Kármán, diese Zeitschr. Bd. 1 (1921), S. 233 bis 252.

Koordinatensystem festlegen, dessen Koordinatenlinien einerseits aus den Parallelkurven, andrerseits aus den Normalen der herausgehobenen Stromlinie bestehen. Ein beliebiger Punkt ist dann durch die Koordinaten s, n bestimmt und die Geschwindigkeit kann in die Komponenten v_s, v_n zerlegt werden (s. Abb. 2), für die man nach bekannten Regeln die drei Gleichungen aufstellen kann, die durch Transformation von (1) auf das gewählte spezielle krummlinige Koordinatensystem hervorgehen. Ich schreibe die Gleichungen nicht an, sondern denke mir an ihnen gleich eine weitere Umformung vorgenommen, nämlich x für s geschrieben, $y : \sqrt{R}$ für n und analog v_x für v_s, $v_y : \sqrt{R}$ für v_n. Faßt man diese neuen x, y wieder als gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten auf, so bedeutet die durchgeführte Transformation

$$x = s, \quad y = n\sqrt{R}; \qquad v_x = v_s, \quad v_y = v_n\sqrt{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

eine doppelte Verzerrung des Strömungsbildes in der Umgebung der Grund-Stromlinie. Erstens ist der Bogen s auf die gerade x-Achse abgewickelt, zweitens ist quer zur Stromrichtung alles $\sqrt{R}$ fach gedehnt. Vollzieht man nun in den drei Differentialgleichungen, die für die neuen v_x, v_y als Funktion der neuen x, y gelten, den Uebergang zu $R \to \infty$, so erhält man, wie eine sehr einfache Rechnung zeigt, folgenden Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \\ 0 &= -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Gegenüber dem allgemeinen Gleichungssystem (1) ist also in der ersten Gleichung der Faktor Z und das letzte Glied rechts fortgefallen, in der zweiten alles bis auf das Druckglied; die dritte Gleichung ist unverändert geblieben. Der Ansatz (3) ist wesentlich identisch mit dem der Prandtlschen Grenzschicht-Theorie, nur die Ableitung unterscheidet sich in drei Punkten. Erstens sind wir nicht vom Rand, sondern von einer beliebigen Stromlinie im Innern ausgegangen; das kann praktisch noch von großer Bedeutung werden wenn auch die Anwendungen sich vorläufig meist auf den Rand beschränken, jedenfalls zeigt es deutlicher den Sinn der ganzen Ueberlegung. Wichtiger ist, daß wir nicht irgend eine Annahme über den Bewegungsverlauf zugrundegelegt haben, also etwa die, daß ein Randgebiet von bestimmter Größenordnung existiert, in dem die Geschwindigkeit rapid anwächst, während im übrigen Raum Potentialbewegung herrscht usf.; im Gegenteil müssen das Bestehen einer solchen Schichte und die Bedingungen hierfür erst als ein Ergebnis der weiteren Rechnung erscheinen. Schließlich wird durch die exakte Form der Ableitung jeder Zweifel beseitigt, ob etwa der Einfluß der Krümmung vollständig berücksichtigt ist u. ähnl.[1]).

Der exakte Sinn des Ansatzes (3) ist also der: Wenn man in einer Folge äußerlich ähnlicher Bewegungen durch Veränderung der Konstanten a, c, Z die Größe R ins Unendliche wachsen läßt und dabei das Strömungsbild in der Umgebung einer beliebigen Stromlinie in der angegebenen doppelten Weise verzerrt, so folgt die verzerrte Strömung im limes den Gl. (3). Irgend eine willkürliche Annahme über den Navier-Stokesschen Ansatz hinaus ist dabei nicht gemacht.

2. Ableitung der Hauptgleichung. Die mathematische Verwertung des Ansatzes (3) geschieht bei Prandtl und seinen Schülern in der Weise, daß zur Befriedigung der letzten Gleichung eine Stromfunktion ψ

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

eingeführt wird, und da aus der zweiten Gleichung folgt, daß p, somit auch $\partial p/\partial x$ nur von x abhängt, gilt für ψ zufolge der ersten:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = f(x).$$

Zu einer einfacheren Formulierung gelangt man, wenn man die durch (4) definierte Stromfunktion ψ nicht als abhängige, sondern als unabhängige Veränderliche neben x

[1]) Vergl. hierzu die nicht ganz eindeutigen Bemerkungen von L. Hopf, Handb. d. Phys. VII, S. 123. Berlin 1927.

benutzt. Zur Unbekannten machen wir die »Strömungsenergie« oder wie der Techniker sagt, die »hydraulische Höhe«, die Summe aus kinetischer Energie, Druck und Kräftepotential der wirklichen Bewegung. Da die letzteren beiden Größen schon in p zusammengefaßt sind und da im Ausdruck der lebendigen Kraft

$$\frac{1}{2}(v_s^2 + v_n^2) = \frac{1}{2}\left(v_x^2 + \frac{v_y^2}{R}\right)$$

nach dem Grenzübergang der zweite Bestandteil verschwindet, setzen wir (unter willkürlicher Hinzufügung der Faktors -2):

$$z = -2\left(\frac{v_x^2}{2} + \frac{p}{\mu}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Sieht man dieses z als Funktion von x und ψ an, so führt ganz kurze Rechnung zu der Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = k\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

mit $$k = v_x = \sqrt{F(x) - z}, \quad F = -2\frac{p}{\mu}$$

Zu dieser Gleichung zweiter Ordnung, die genau die Form der Wärmeleitungsgleichung eines Stabes mit variabler Wärmekapazität hat, tritt nur noch, wenn man das (verzerrte) Strömungsbild finden will, die Quadratur

$$y = \int \frac{d\psi}{v_x} = \int \frac{d\psi}{\sqrt{F(x) - z}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

hinzu. In der Wärmeleitungs-Analogie entspricht die Abszisse x der Zeit, die Größe ψ der Ortskoordinate des Stabes und die Strömungsenergie z der Temperatur. Da jede noch so kleine endliche Breite der ursprünglichen Strömung beim Grenzübergang einen unendlichen Bereich für y und daher für ψ ergibt, haben wir einen Stab von unendlicher Länge.

Wir benutzen das Wärmebild vor allem dazu, die vorzuschreibenden Randbedingungen festzustellen. Bekanntlich ist eine Lösung von (6) bestimmt, wenn die Temperatur z zu Beginn, also bei $x = 0$, für alle ψ gegeben ist und die Temperatur der Stabenden $\psi = 0$ und $\psi = \infty$ für alle x. Wenn ψ gegen ∞ geht, müssen wir annehmen, daß z einen endlichen Grenzwert erhält, womit bei normalem Verlauf $\partial^2 z/\partial \psi^2 = 0$ verbunden ist. Dann zeigt (6), daß hier z auch von x unabhängig ist und da wir eine additive Konstante noch frei haben, können wir ein für allemal festsetzen:

$$z = 0 \quad \text{für} \quad \psi \to \infty \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6a).$$

Das bedeutet soviel wie, daß $F(x)$ gleich dem Quadrat der Geschwindigkeit u ist, in die v_x bei unbeschränkter Entfernung von der Grundstromlinie übergeht, so daß

$$z = u^2 - v_x^2.$$

Natürlich muß $F(x) = u^2(x)$ von vornherein gegeben sein, wenn man (6) integrieren will. Ist die Grundstromlinie eine feste Führung, auf der $v_x = 0$, so haben wir die zweite Randbedingung

$$z = F(x) \quad \text{für} \quad \psi = 0 \quad . \quad . \quad (6b).$$

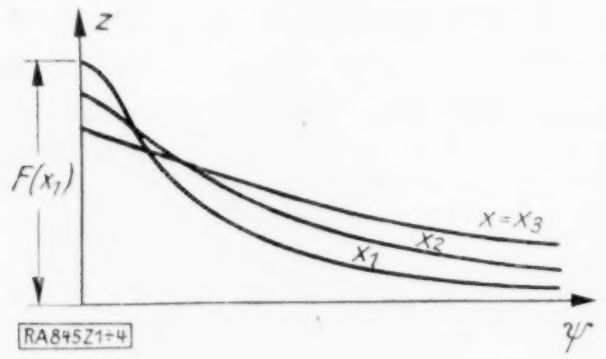


Abb. 3.

Im allgemeinen Fall, wenn v_x für $\psi = 0$ beliebig gegeben ist, tritt dafür eben $z_0(x) = F(x) - v_{x^2(\psi=0)}$. Endlich bedeutet die Angabe von

$$z = z_0(\psi) \quad \text{für} \quad x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (6c)$$

nichts anderes als die Kenntnis der Geschwindigkeitsverteilung quer zur Grundstromlinie an ihrem Beginn. Eine bildliche Darstellung der Verhältnisse erhält man am besten, indem man z als Funktion von ψ für aequidistante Festwerte von x gezeichnet denkt (Abb. 3). Anfangs- und Endpunkt jeder Linie sind durch (6a) (6b), die erste Linie selbst durch (6c) gegeben und (6) zeigt, wie eine Linie aus der vorangehenden entsteht, etwa durch

$$z_{\nu+1}(\psi) - z_\nu(\psi) = \Delta x \cdot \sqrt{F(x) - z_\nu}\,\frac{\partial^2 z_\nu}{\partial \psi^2}, \quad (\nu = 1, 2 \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Diese Formel ist zugleich die einfachste Vorschrift für eine praktische Integration von (6).

Die Linien $x =$ konst. entsprechen ungefähr den (umgedrehten) Geschwindigkeitsprofilen. Jedenfalls ist $^1/_2 \partial z/\partial \psi = -\partial v_x/\partial y = -\partial v_x/\sqrt{R}\,\partial n$. Daraus folgt, daß eine endliche Tangentenneigung der z-Linie unendlich starkes Quergefälle der Geschwindigkeit in der ursprünglichen Strömung bedeutet. So läßt sich auch entscheiden, unter welchen Bedingungen die Erscheinung auftritt, die man als Grenzschicht zu bezeichnen pflegt. Erstens immer dann, wenn der gegebene Druckverlauf nicht mit dem Geschwindigkeitsverlauf längs der Grundlinie übereinstimmt, d. h. z für $\psi = 0$ nicht konstant ist, und zweitens, unabhängig vom Druckverlauf, wenn die gegebene Geschwindigkeitsverteilung im Eintrittsquerschnitt schon das unendliche Gefälle aufweist. In diesem letzteren Fall verliert sich die Grenzschicht allmählich mit Entfernung vom Anfangsquerschnitt, d. h. sie wird mit wachsendem x unendlich breit. Auf eigentliche feste Randlinien angewendet heißt das: Eine Randschichte mit steilem Geschwindigkeitsabfall besteht immer, wenn der Druck längs des Randes nicht konstant ist; bei konstantem Druck, wie in dem Beispiel der eingetauchten Platte, kann sie durch die Eintrittsbedingungen erzwungen werden, geht aber dann allmählich in die normale Strömung über. Diese Bemerkungen werden von Bedeutung, wenn man etwa nach der Strömung fragt, die sich in einer Leitung mit (der Länge nach) periodisch veränderlichem Druck einstellt: Mögen die Druckschwankungen noch so gering sein, bei hinreichend großem R bildet sich eine Grenzschicht aus, die nur dann ausbleibt, wenn gar keine Schwankungen da sind. Hierin mag man einen Beitrag zum Verständnis der praktischen Instabilität der Poiseuille-Bewegung finden.

Der Anwendung unserer Theorie auf Stromlinien im Innern steht in der Regel der Umstand im Wege, daß man über den limes der Geschwindigkeits- und Druckverteilung längs solcher Linien selten etwas weiß. Das Auftreten einer inneren »Grenzschicht« kommt in Frage, wo eine fortschreitende Strömung an einen Totraum grenzt, ferner beim Auslauf hinter einem Hindernis usf.

3. Einige Folgerungen. Ich will noch einige einfache Folgerungen aus dem Ansatz (6) kurz besprechen, wobei nochmals hervorgehoben sei, daß es sich um vollkommen strenge, von jeder willkürlichen Annahme freie Konsequenzen aus der Navier-Stokesschen Theorie handelt. Zunächst ergeben sich die beiden bekannten Spezialfälle, die auf je eine gewöhnliche Differentialgleichung führen: Der Prandtl-Blasiussche Fall der in gleichförmige Strömung eingetauchten Platte mit

$$F = \text{konst.} \qquad F - z = f\left(\frac{\psi}{\sqrt{x}}\right), \quad f'' = -\frac{f'}{2\sqrt{f}} \cdot \frac{\psi}{\sqrt{x}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

(die Gleichung zweiter Ordnung ist gleichwertig der von Blasius numerisch integrierten von dritter Ordnung)[1]) und die von v. Kármán und K. Pohlhausen gefundene Grenzschicht in einer linear zusammenlaufenden Düse[2])

$$F = \frac{1}{x^2}, \quad z = \frac{w(\psi)}{x^2}, \quad w'' = \frac{2w}{\sqrt{1-w}} \quad (x < 0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

mit dem Integral

$$\psi - \psi_0 = \sqrt{2}\,(q - 3\,\text{Tang}\,q), \quad \text{Tang}^2 q = {}^1/_3\,(2 + \sqrt{1-w}) \quad . \quad . \quad . \quad (8b).$$

Im ersten Fall gehen die Kurven $x =$ konst. durch affine Transformation in der ψ Richtung auseinander hervor, wobei sie sich schließlich der horizontalen Geraden nähern, im zweiten Fall ist es die gleiche Transformation in der z Richtung. Es läßt sich zeigen, daß dies die beiden einzigen Fälle von derart einfacher geometrischer Beschaffenheit sind.

Zur allgemeinen Integration von (6) bieten sich verschiedene Wege dar, von denen einer schon oben erwähnt wurde. Dieser hat den Nachteil, daß er die zweimalige Differentiation einer doch nur mit begrenzter Genauigkeit gegebenen Funktion erfordert. Es empfiehlt sich daher besser, an Stelle von (7):

$$z_{\nu+1}(\psi) - z_\nu(\psi) = \Delta x \cdot \sqrt{F(x) - z_\nu}\,\frac{\partial^2 z_{\nu+1}}{\partial \psi^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

zu schreiben, was eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für $z_{\nu+1}(\psi)$, mit gegebenen Randwerten $z_{\nu+1}(0)$ und $z_{\nu+1}(\infty)$ bedeutet. In beiden Fällen kann man eine

[1]) H. Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung. Inaug.-Diss. Göttingen 1907.

[2]) K. Pohlhausen, diese Zeitschr., Bd. 1 (1921), S. 267; Th. v. Kármán, Vorträge aus der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922), Berlin 1924.

einmal gefundene Näherungslösung durch Quadraturen nach dem Verfahren der Näherungsfolgen beliebig verbessern: Ist $z^{(1)}(x, \psi)$ die erste Lösung, so bekommt man eine genauere in

$$z^{(2)}(x, \psi) = \int^{x} \sqrt{F(x) - z^{(1)}}\, \frac{\partial^2 z^{(1)}}{\partial \psi^2}\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

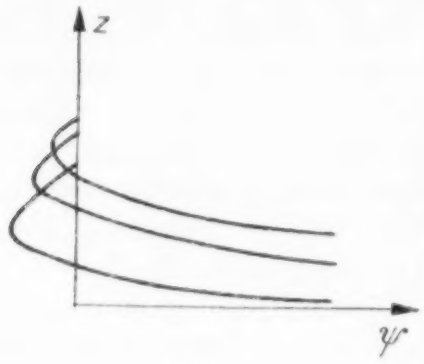


Abb. 4.

All dies geht nur solange ohne Schwierigkeit, als man nicht über die singuläre Stelle, an der der Wurzelausdruck durch Null geht und die eine Bewegungsumkehr bedeutet, hinauswill. Hinter einer Ablösungsstelle wird das Integral von (6) durch Kurven dargestellt, die Schleifen aufweisen (Abb. 4), da ψ jetzt auch negative Werte von mit x wachsendem Betrage annehmen kann. Für derartige Probleme gibt es eine gewisse Analogie in der Theorie der Wärmeleitung, nämlich im sog. Problem des Vordringens des Frostes, wobei eine mit der Zeit veränderliche Stabbegrenzung auftritt. Aber die mathematische Untersuchung in dieser Richtung weiter zu führen, scheint vorläufig wenig nützlich zu sein, da man über den Druckverlauf hinter der Ablösungsstelle wohl nicht genug weiß.

Besonderes Interesse hat in der Grenzschichttheorie stets die Frage nach der Stelle der Ablösung gefunden, d. h. nach jenem Wert von x, an dem

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)_{\psi=0} = -2\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Da es sich hier in erster Linie um das Verhalten von z in der Nähe von $\psi = 0$ handelt, tut man gut, einen Reihenansatz zu benutzen, der die Gestalt erhalten muß:

$$z = F(x) - \psi\,[c_0(x) + c_1(x)\sqrt{\psi} + c_2(x)\,\psi + c_3(x)\,\psi\sqrt{\psi} + \ldots] \quad . \quad . \quad (12).$$

In dem Ansatz ist die Bedingung (6b) schon berücksichtigt und die Fragestellung (11) geht dahin, für welches x das c_0 verschwindet. Die Gleichungen, die man für die Koeffizienten c_0, c_1, c_2 . . . erhält, sind so beschaffen, daß sie, wo immer man abbricht, um eine Variable zu viel enthalten. Dies liegt daran, daß die Lösung auch an der Stelle $\psi = 0$ von der Bedingung (6a), die das Verhalten für $\psi = \infty$ regelt, abhängt. Man erhält nun, wenn man in (12) die Glieder bis zur sechsten Ordnung in $\sqrt{\psi}$ exakt berücksichtigt und für das nächste eine Näherung einführt, die den Anschluß im Unendlichen herstellt, für $c_0(x)$ eine Differentialgleichung erster Ordnung, die je nachdem wie $F(x)$ gegeben ist, graphisch, numerisch oder auch in geschlossener Form integriert werden kann.

Ich habe nun nur noch ein Wort zu sagen über die sog. Kármánsche Integralbedingung, die ja auch eine Methode sein soll, die Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht näherungsweise zu integrieren. Multipliziert man (6) mit $dy = d\psi : \sqrt{F - z}$ und integriert dann beide Seiten von 0 bis ∞, so erhält man, weil $\partial z/\partial \psi$ im Unendlichen verschwindet:

$$\int_0^\infty \frac{\partial z}{\partial x}\, dy = -\left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)_{\psi=0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Führt man für z seinen Wert $v_x^2 - u^2$ ein und bezeichnet eine Ableitung nach x bei konstantem y (nicht bei konstantem ψ) durch Akzente, so wird daraus

$$\int_0^\infty (u\,u' + u\,v_x' - 2\,v_x\,v_x')\, dy = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13').$$

Diese Gleichung, die eben die Kármánsche Integralbedingung darstellt und sich leicht als Impulssatz deuten läßt, kann natürlich für sich allein den Ansatz (6) nicht ersetzen. Nimmt man aber an, daß die Form der z-Kurven oder der Geschwindigkeitsprofile irgendwoher bekannt ist, so daß nur innerhalb einer gegebenen einparametrigen Schar die Auswahl zu treffen ist, so reicht (13) gerade hin, um diesen Parameter q als Funktion von x zu bestimmen. Für den Fall der eingetauchten Platte, mit u = konst., $u' = 0$, setzt K. Pohlhausen[1]) in Ausführung des Kármánschen Gedankens

$$v_x = u\,f(\eta), \quad \eta = q(x) \cdot y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

[1]) Vergl. Fußnote S. 429.

erhält durch Einsetzen von (14) in (13′) eine Differentialgleichung erster Ordnung für $\varphi(x)$ und benutzt deren Lösung, um nach Kenntnis von v_x aus (14) den Widerstand

$$W = Z \int_0 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} dx$$

zu berechnen. Allein eine einfache Umformung von (13) läßt erkennen, daß W gar nicht von φ abhängt, so daß die ganze Rechnung leerlaufend ist. Es gilt nämlich

$$W = \sqrt{2 \varkappa u^3 l} \quad \text{mit} \quad \varkappa = Z \int_0^\infty f(1-f)\, d\eta.$$

Da $f(\eta)$ willkürlich, nur unter Innehaltung gewisser Randbedingungen, gewählt wird, kann man dem $\varkappa$ jeden Wert zwischen 0 und ∞ erteilen und es kommt auf dasselbe hinaus, gleich $\varkappa$ »anzunehmen«. Aus ähnlichen Gründen kann die weitere Pohlhausensche Rechnung kaum mehr als einen Anhaltspunkt für die Größenordnung der gesuchten Werte bilden. Ob beim umströmten Zylinder die theoretische Ablösungsstelle 5^0 oder 10^0 oder 15^0 hinter dem Druckminimum liegt, darüber kann die Integralbedingung mit der willkürlichen Annahme von f nicht entscheiden. Eine genaue Lösung, die sich auf den hier dargelegten Grundlagen aufbaut, soll demnächst veröffentlicht werden. 845, 3

4. Propellerfragen.

Von **A. BETZ** in Göttingen.

Der Propeller, insbesondere der Schraubenpropeller, hat schon umfangreiche Bearbeitung gefunden, sowohl experimentell wie theoretisch. Dabei sind die Vorgänge am Schraubenpropeller an sich gar nicht so besonders unübersichtlich, und man kann auch ohne große Schwierigkeiten Propeller mit sehr hohen Wirkungsgraden, etwa über 90 vH, konstruieren. Wenn trotzdem das Propellerproblem immer wieder bearbeitet wird und bearbeitet werden muß, so liegt das an Schwierigkeiten, welche infolge ungünstiger Nebenbedingungen auftreten. Ich möchte Ihnen einen kurzen Ueberblick über die wichtigsten hierbei auftretenden Fragen geben und gleichzeitig versuchen, den gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse darzulegen. Ein Propeller arbeitet im allgemeinen stets mit einem Fahrzeug zusammen. Gerade diese Zusammenwirkung von Fahrzeug und Propeller bereitet nun die größten Schwierigkeiten. Um hier überhaupt weiterzukommen, muß man zunächst über die Erscheinungen am Fahrzeug allein und am Propeller allein hinreichende Klarheit besitzen. Man wird daher zunächst den Propeller ohne Fahrzeug, den sogenannten alleinfahrenden Propeller, behandeln müssen.

1. Der alleinfahrende Propeller. Die wesentlichen Grundlagen unserer heutigen Propellertheorien sind bereits vor einem halben Jahrhundert von den Engländern Rankine und Froude geschaffen[1]). Es handelt sich dabei um zwei Betrachtungsweisen: Die sogenannte Schraubenstrahltheorie betrachtet Impuls und Energie der Flüssigkeit vor und hinter dem Propeller. Sie kommt in ihrer einfachsten Form, wobei nur Kräfte und Geschwindigkeiten in axialer Richtung betrachtet werden, zu zwei wichtigen Ergebnissen:

1. Durch die Betriebsbedingung, d. s. geforderter Schub, Fahrgeschwindigkeit und Flüssigkeitsdichte, ist bei gegebenem Propellerdurchmesser ein unvermeidbarer Energieverlust bedingt. Dieser rührt daher, daß zur Erzeugung des Schubes Flüssigkeit nach rückwärts beschleunigt werden muß, deren kinetische Energie nutzlos verloren geht. Das wesentliche Ergebnis dieser Betrachtungsweise ist der bekannte maximale theoretische Wirkungsgrad der Propeller.
2. Die Geschwindigkeit, mit der die Flüssigkeit durch die Propellerebene hindurchströmt, ist gerade das arithmetische Mittel der Geschwindigkeiten vor und hinter dem Propeller.

[1]) Rankine, On the Mechanical Principles of the Action of Propellers. Transactions of the Institution of Naval Architects. Bd. VI, S 13, 1865. — Froude, On the Elementary Relation between Pitch, Slip and Propulsive Efficiency. Transactions of the Institution of Naval Architects. Bd. XIX, S 47, 1878 — Froude, On the Part played in Propulsion by Differences of Fluid Pressure. Transactions of the Institution of Naval Architects. Bd. XXX, S. 390, 1889.

Die andere Betrachtungsweise, die sogenannte Flügelblatt-Theorie, verfolgt die Vorgänge am Propellerflügel. Insbesondere stellt sie fest, daß durch den Widerstand des Flügels entgegen seiner Bewegungsrichtung ein Energieverlust entsteht, der sich ebenfalls in einem Wirkungsgrad ausdrücken läßt; wir wollen ihn Flügelwirkungsgrad nennen. Außerdem ergibt diese Betrachtungsweise die für einen bestimmten Schub erforderliche Flügelbreite und Flügelstellung. Es war lange Zeit umstritten, wie die beiden Theorien, die, von ganz verschiedenen Ueberlegungen ausgehend, einen Propellerwirkungsgrad ableiten, zusammenhängen. Heute wissen wir, daß diese beiden Theorien bei zweckmäßiger Formulierung zwei im wesentlichen voneinander unabhängige Verlustquellen erfassen. Die nach den beiden Methoden erhaltenen Verluste addieren sich also. Genau genommen lassen sich die beiden Verlustquellen allerdings nicht scharf voneinander trennen, indem einerseits der Flügelwiderstand auch die Störungsgeschwindigkeiten im Schraubenstrahl beeinflußt und andererseits der gegenseitige Einfluß der Flügel aufeinander am einfachsten durch die Schraubenstrahltheorie zum Ausdruck gebracht werden kann. Glücklicherweise ist nun aber bei einem guten Propeller der Flügelwiderstand so klein gegenüber den sonstigen Kräften (dem Flügelauftrieb), daß man seinen Einfluß auf die Störungsgeschwindigkeiten meist vernachlässigen kann. Dadurch wird die Schraubenstrahltheorie unabhängig von den speziellen Eigenschaften des Flügels, was eine wesentliche Vereinfachung bedeutet. Die speziellen Flügeleigenschaften lassen sich dann vollständig getrennt durch die Flügelblatt-Theorie zur Geltung bringen[1]). Dagegen ist für eine einwandfreie Anwendung der Flügelblatt-Theorie meist das Ergebnis der Strahltheorie erforderlich. Man muß nämlich für die Beurteilung der Vorgänge am Flügel die Relativgeschwindigkeit der Flügel zur Flüssigkeit kennen. Diese ist aber nicht genau identisch mit der Absolutgeschwindigkeit der Flügel im Raum, da ja der Propeller die Flüssigkeit beschleunigt, so daß in der Propellerebene die Flüssigkeit bereits eine Eigengeschwindigkeit besitzt. Ueber die Größe dieser Störung gibt nun gerade die Schraubenstrahltheorie Auskunft.

Wenn man aber die Schraubenstrahltheorie in dieser Weise verwerten will, daß man daraus die Störungsgeschwindigkeiten in der Propellerebene ermittelt, um ein Urteil über die Vorgänge am Flügel und insbesondere auch über die für die beabsichtigte Wirkung erforderliche Größe und Stellung der Flügel zu gewinnen, so genügt die erwähnte einfache Form der Strahltheorie nicht mehr. Der Propeller beschleunigt nämlich die Flüssigkeit nicht nur in axialer Richtung, sondern übt auch ein Drehmoment auf die Flüssigkeit aus, woraus sich eine Drehung des Schraubenstrahles ergibt. Diese Drehung bedeutet einen weiteren Energieverlust, also eine Verminderung des Wirkungsgrades. Für sehr viele Fälle ist allerdings die Größe dieses Energieverlustes nur von untergeordneter Bedeutung. Wichtig ist die Kenntnis der Strahldrehung vor allem eben für die Beurteilung der Vorgänge am Flügelblatt.

Wenn man die Strahldrehung unbeachtet läßt, so sind alle Punkte der Schraubenkreisfläche in ihrer Wirksamkeit gleichwertig. Man nimmt daher in der einfachen Strahltheorie den Schub als gleichmäßig über die Schraubenkreisfläche verteilt an. Einmal ist das für die Rechnung am einfachsten, außerdem ergibt es aber auch den kleinsten Verlust. Wenn man aber die Strahldrehung berücksichtigt, so ergeben die in der Nähe der Achse gelegenen Teile einen erheblich schlechteren Wirkungsgrad als die übrigen, da dort die Drehungsenergie verhältnismäßig groß ist. Man muß sich daher noch besonders überlegen, wie man den Schub über die Schraubenkreisfläche verteilen muß, damit der Verlust bei gegebenem Schub und gegebener Fahrgeschwindigkeit möglichst klein wird. Ich muß hier aber betonen, daß dieses Aufsuchen der günstigsten Schubverteilung nicht so sehr den Zweck hat, den absolut besten Wirkungsgrad zu erzielen, als vielmehr den,

[1]) Prinzipiell wäre es natürlich richtiger, eine einheitliche Theorie zu verwenden, welche sowohl die Vorgänge am Flügel wie auch das Zusammenwirken der Flügel umfaßt. Man muß dann aber auf die wesentliche Vereinfachung verzichten, welche die Trennung in Flügelblatt- und Strahltheorie bietet. Ein Beispiel einer solchen allgemeineren Theorie ist von H. Reißner in der Arbeit: Studien zur Berechnung und planmäßigen Prüfung der Luftschrauben (Zeitschr. für Flugtechn. u. Motorluftschiffahrt, 1., 2. und 3. Jahrg.) gegeben. Solche allgemeinere Betrachtungsweisen sind hauptsächlich dann von Bedeutung, wenn es sich um die Behandlung von Propellern unter ungünstigen Betriebsbedingungen handelt, bei denen die Verluste am Flügelblatt nicht mehr verhältnismäßig klein sind, so daß die erwähnte Abtrennung dieser Verluste von den übrigen Vorgängen nicht mehr recht zulässig ist. Leider muß man aber bei einer allgemeineren Behandlung meist so erhebliche andere vereinfachende Annahmen machen, daß es fraglich ist, ob das Ergebnis zuverlässiger ist, als bei der geschilderten Abtrennung der Flügelblattvorgänge.

die Strömungsverhältnisse für die praktisch hauptsächlich vorkommenden Verhältnisse zu finden, da man natürlich praktisch möglichst in der Nähe des besten Wirkungsgrades arbeiten wird. Außerdem hat sich gezeigt, daß die Verhältnisse bei diesen günstigsten Bedingungen besonders einfach werden.

Vor einigen Jahren habe ich in einer Arbeit in den Göttinger Nachrichten [1]) zeigen können, daß diese Frage nach dem kleinsten Energieverlust zu einer verhältnismäßig einfachen Aussage über den Strömungsverlauf im Schraubenstrahl führt. Die Strömung ist dort nämlich so, wie wenn die von den Flügeln durchlaufenen Bahnen, d. s. Schraubenflächen, erstarrt wären und sich wie starre Schraubenflächen nach rückwärts verschieben. Für schwach belastete Schrauben, d. s. solche, bei denen die von der Schraube verursachten Störungsgeschwindigkeiten klein sind gegenüber der Bewegung der Schraube selbst, kann man auf Grund dieser Aussage über die Vorgänge im Schraubenstrahl auch verhältnismäßig leicht auf die Strömung in der Propellerebene schließen. Dieser Schluß wird insbesondere dadurch erleichtert, daß der bereits bei der einfachen Strahltheorie gefundene Satz, daß die Störungsgeschwindigkeiten in der Propellerebene halb so groß sind wie im Schraubenstrahl, auch noch mit Einschluß der Drehung gilt.

Wenn man aber zu stark belasteten Schrauben übergeht, bei denen die Störungsgeschwindigkeiten nicht mehr klein gegenüber der Eigenbewegung der Schraube selbst sind, so ergeben sich erhebliche Schwierigkeiten. Zwar bleibt die erwähnte Aussage über den Strömungsvorgang im Schraubenstrahl bestehen. Aber schon die Berechnung der Geschwindigkeiten im Strahl auf Grund dieser Aussage stößt auf Schwierigkeiten, indem durch die Drehung des Strahles im Innern desselben ein Unterdruck herrscht, der die Geschwindigkeitsverteilung beeinflußt. Insbesondere macht aber der Uebergang von den Vorgängen im Schraubenstrahl zu denen in der Propellerebene Schwierigkeiten, indem für stark belastete Schrauben die Störungsgeschwindigkeiten in der Propellerebene nicht mehr gerade halb so groß sind wie im Strahl. Ich habe in letzter Zeit, zusammen mit Herrn Helmbold, diese Fragen weitgehend bearbeitet und, wie mir scheint, brauchbare Lösungen erhalten. Ich hoffe, daß wir darüber in nächster Zeit in dieser Zeitschrift berichten können.

Somit dürfte die Frage des alleinfahrenden Propellers ziemlich weitgehend behandelt werden können. Man kann aber natürlich nie voraussehen, inwieweit durch neue Betriebsbedingungen neue Fragen auftauchen. Die Umstände, welche heute hauptsächlich erschwerend wirken, sind folgende:

1. Der für den Propeller zur Verfügung stehende Raum ist beschränkt, z. B. beim Flugzeug durch die Nähe des Bodens beim Start und bei der Landung, oder bei Schiffen durch den Tiefgang. Man muß daher oft stärker belastete Schrauben verwenden als es wünschenswert ist.

2. Der Propeller muß in seiner Drehzahl dem Motor angepaßt werden. Der Motor läuft aus Gründen der Gewichtsersparnis meist zu schnell für den Propeller. Man erhält entweder ungünstig kleine Steigung, was den Flügelwirkungsgrad beeinträchtigt, oder zu kleinen Propellerdurchmesser und damit wieder zu große Belastung. Man hilft sich neuerdings hiergegen vielfach durch Einschalten von Uebersetzungsgetrieben zwischen Motor und Propeller.

3. Die Umfangsgeschwindigkeit der Propeller ist absolut beschränkt, in der Luft durch die Schallgeschwindigkeit, im Wasser durch Kavitation. Wenn nämlich die Geschwindigkeit der Flügel in die Nähe der Schallgeschwindigkeit kommt, so wird die Arbeitsweise der Flügel gestört, der Flügelwirkungsgrad sinkt sehr stark. In Wasser kann man nur Unterdrücke bis in die Nähe des absoluten Vakuums erzeugen, da dann das Wasser verdampft und der Strömungsvorgang wesentlich verändert wird. Durch diese Erscheinungen ergeben sich, insbesondere für sehr schnelle Fahrzeuge, Schwierigkeiten.

4. Der Propeller muß unter sehr verschiedenen Betriebsbedingungen arbeiten. Die geschilderten Theorien behandeln im allgemeinen die Aufgabe, für eine bestimmte Betriebsbedingung: Schub, Drehzahl, Fahrgeschwindigkeit, einen günstigen Propeller zu finden und sein Verhalten unter dieser bestimmten Bedingung kennen zu lernen. Nun muß aber derselbe Propeller vielfach auch noch unter anderen Betriebsverhältnissen ar-

[1]) A. Betz, Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust, mit einem Zusatz von L. Prandtl, Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1919, S. 193. Im Neudruck erschienen in Prandtl-Betz, Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, 1927. (Auslieferung durch J. Springer.) In dieser Schrift ist auch weitere Literatur über diesen Gegenstand angegeben.

beiten, so z. B. insbesondere bei der Anfahrt, wo zunächst die Fahrgeschwindigkeit Null ist. Man kann natürlich nicht verlangen, daß derselbe Propeller für alle Betriebslagen gut ist. Aber man muß doch Gewißheit haben, daß er nicht unter gewissen praktisch eintretenden Verhältnissen vollständig versagt. Es wird ja kaum vorkommen, daß ein Propeller, der einem Flugzeug im normalen Fluge gut angepaßt ist, das Flugzeug beim Start überhaupt nicht von der Stelle bringt. Aber sehr wohl kann es sein, daß durch zu geringen Propellerschub bei kleinen Geschwindigkeiten der Start übermäßig lang wird. Man wird im allgemeinen so vorgehen, daß man zunächst den Propeller für den im Betriebe wichtigsten Zustand entwirft, dann aber zusieht, wie die Verhältnisse bei anderen wichtigen Zuständen sind. Insbesondere muß man darauf achten, daß bei der Anfahrt die Anstellwinkel der Flügelprofile gegen die relative Flüssigkeitsbewegung nicht zu groß werden, so daß die Flügel nicht mehr normal arbeiten (die Strömung reißt ab). Nötigenfalles muß man von der gefundenen günstigsten Form etwas abweichen, z. B. die Flügel breiter machen. Bei schnellen Fahrzeugen wird man allerdings kaum bei der Anfahrt solch ungünstige Arbeitsweisen (Abreißen) vermeiden können. Man muß aber wenigstens zusehen, daß dieses ungünstige Gebiet möglichst bald überwunden wird. Ein Mittel, diese Schwierigkeiten zu verringern, ist durch die sog. Verstellpropeller gegeben, bei denen die Flügel drehbar sind, so daß man ihre Steigung verändern kann. Dieses Mittel bringt aber eine unerfreuliche Komplikation mit sich und löst außerdem die Schwierigkeiten auch nicht vollständig.

2. Der Propeller am Fahrzeug. Wenn der Propeller am Fahrzeug arbeitet, so stört einerseits das Fahrzeug die Vorgänge am Propeller, andererseits ändert der Propeller die Strömung am Fahrzeug und die Kräfte auf dasselbe. Das hat zur Folge, daß der scheinbar so einfache Begriff des Schubes sich nicht mehr eindeutig festlegen läßt. Um Ihnen diese Verhältnisse zunächst in krasser Form vor Augen zu führen, will ich ein ganz extremes Beispiel aufzeichnen. Der Propeller sei etwa so unzweckmäßig angeordnet, wie die Abb. 1 zeigt. Flüssigkeit strömt durch ihn nicht hindurch, infolgedessen ist zum Antrieb, abgesehen von den Arbeitsverlusten, auch keine Arbeitsleistung erforderlich. Trotzdem kann in dem vom Propeller abgeschlossenen Raume ein erheblicher Unterdruck herrschen; der Propeller wirkt dann ähnlich wie ein Pumpenkolben. Man wird daher an der Propellerwelle u. U. einen erheblichen Schub messen können. Diesem kommt aber nur die Bedeutung einer inneren Kraft des Systems zu, da eine gleich große, aber entgegengesetzte Kraft auf das Schiff wirkt. Für die Energieumsetzung spielt dieser Schub keine Rolle. So extrem liegen natürlich die Verhältnisse wohl nie, aber etwas von dieser Erscheinung ist stets vorhanden.

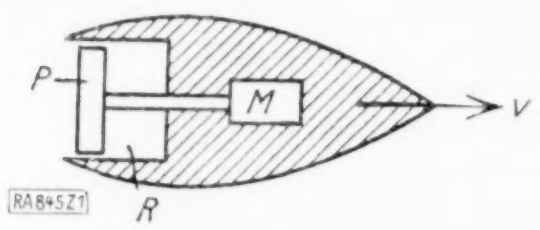


Abb. 1. Propelleranordnung zur Darlegung des gegenseitigen Einflusses von Propeller und Fahrzeug. P = Propeller, M = Antriebsmotor, R = abgeschlossener Raum. (Aus Geiger und Scheel, Handb. d. Physik Bd. VII.)

Vor einigen Jahren hat Herr Fresenius im Schiffbau diese Vorgänge in mustergültig klarer Weise dargestellt[1]). Man muß nämlich zwei Fälle scharf unterscheiden: Die Störung, welche der Schiffskörper bei seiner Bewegung verursacht, ist teils verlustlose Potentialbewegung, diese verschwindet wieder, wenn das Schiff vorübergegangen ist. Teils rührt sie vom Schiffswiderstand, also von Vorgängen mit Energieverlust, her, indem der Flüssigkeit ein Bewegungsimpuls erteilt wird, welcher nicht wieder verschwindet. Befindet sich der Propeller in einer reinen Potentialströmung (Abb. 2), so können wir den Schraubenstrahl so weit verfolgen, bis wir in ein ungestörtes Gebiet kommen. Da sich sowohl der Schub auf das ganze System wie auch die Propellerleistung aus dem Schraubenstrahl feststellen lassen, so ergibt sich, daß wir denselben Schub und dieselbe Propellerleistung erhalten können, wenn wir den Propeller an einer anderen Stelle anbringen, wenn er nur in großer Entfernung vom Fahrzeug denselben Schraubenstrahl bildet. Es besteht nur der Unterschied, daß wir an Stellen kleiner Geschwindigkeit einen größeren Propeller brauchen, als an Stellen großer Geschwindigkeit. Man wird also in diesem Falle den Propeller möglichst im Gebiet größter Geschwindigkeit anordnen.

---

[1]) Fresenius, Das grundsätzliche Wesen der Wechselwirkung zwischen Schiffskörper und Propeller. Schiffbau 1921/22, S. 257.

Ganz anders ist es, wenn die Störung durch den Schiffswiderstand verursacht ist. Die Arbeit, die bei der Bewegung des Schiffes geleistet wird, wird teils zur Erzeugung von Wärme verbraucht, oder von Wirbeln, deren Energie bald in Wärme übergeht. Zum Teil erzeugt sie aber auch makroskopische Flüssigkeitsbewegungen, deren Energie durch geeignete Vorrichtungen wieder gewonnen werden könnte. Insbesondere hat das Totwasser hinter dem Schiff relativ zur umgebenden Flüssigkeit eine Geschwindigkeit in Richtung der Schiffsbewegung (Abb. 3). Diese Relativbewegung läßt sich prinzipiell ohne weiteres zur Energierückgewinnung ausnutzen. Wenn nun ein Propeller in einem solchen nachströmenden Totwasser arbeitet, so gewinnt er tatsächlich einen Teil dieser Energie wieder, indem er das Wasser in entgegengesetzter Richtung beschleunigt, also zu-

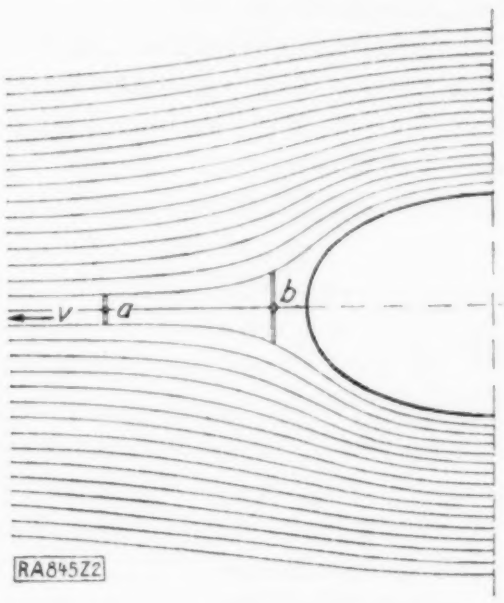


Abb. 2. Potentialströmung hinter einem Körper. Der kleine Propeller bei *a* kann denselben Schraubenstrahl erzeugen wie der große bei *b*. (Nach Fresenius a. a. O.)

Abb. 3. Nachströmendes Totwasser (schraffiert) hinter einem bewegten Körper. v = Fahrgeschwindigkeit des Körpers, v' = Nachstromgeschwindigkeit.

nächst wenigstens verlangsamt, also seine kinetische Energie vermindert. Dies kommt in der Weise zur Geltung: Die Nutzleistung des Propellers ist Schub mal Schiffsgeschwindigkeit. Für den Leistungsbedarf ist aber nicht die Schiffsgeschwindigkeit maßgebend, sondern die Relativgeschwindigkeit zwischen Propeller und Flüssigkeit. Letztere ist aber in dem nachströmenden Totwasser kleiner, also auch der Leistungsbedarf [1]). In diesem Falle also, wo die Störung auf Energieverlust beruht, muß man den Propeller zweckmäßig an Stellen kleinster Geschwindigkeit anbringen. Wegen dieses ganz entgegengesetzten Verhaltens ist es wichtig, den Nachstrom in seine zwei Anteile zu trennen: was davon auf Potentialströmung und was auf Energieverlust zurückzuführen ist. Einen Versuch dieser Art erwähnte Herr Helmbold in einer Diskussionsbemerkung auf der Schiffbautechn. Gesellschaft Herbst 1926 [2]).

Für die richtige Formgebung der Propeller ist es jedoch mit dieser prinzipiellen Erkenntnis nicht getan. Da nämlich der Nachstrom von Punkt zu Punkt verschieden ist, so muß man die Propellersteigung diesen veränderlichen Verhältnissen möglichst anpassen. Herr Kempf hat dies mit gutem Erfolg versucht [3]). Dabei kann man allerdings nur die radiale Veränderlichkeit der Strömung berücksichtigen. Außer dieser kommt aber ein und dasselbe Flüssigkeitsteilchen bei einem Umlauf des Propellers bald in schnellere, bald in langsamere Strömung (Abb. 4). Hierfür kann natürlich eine Anpassung der Steigung nichts nützen. Man muß mit Rücksicht auf solche Verhältnisse Flügelprofile verwenden, welche in einem großen Anstellwinkelbereich brauchbar sind. Die Aufgabe ist ganz ähnlich wie jene, die beim alleinfahrenden Propeller mit Rücksicht auf die Anfahrt auftrat.

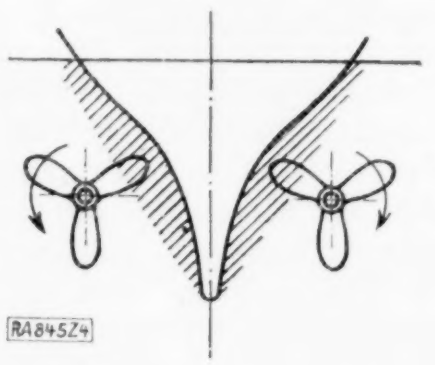


Abb. 4. Totwasser (schraffiert) am Hinterende eines Zweischraubenschiffes und Lage der Propeller dazu. Die Propellerflügel arbeiten abwechselnd in Gebieten großer Geschwindigkeit (ungestörte Strömung) und kleiner Geschwindigkeit (Totwasser).

Ein weiterer gegenseitiger Einfluß zwischen Propeller und Fahrzeug kommt dadurch zustande, daß die vom Pro-

[1]) Bei Potentialströmung ist das zwar auch der Fall, aber dort wird der Gewinn durch die Nachstromgeschwindigkeit gerade wieder ausgeglichen durch eine entsprechende Vermehrung des Schiffswiderstandes durch den sogenannten Sog.

[2]) Horn, Versuche mit Tragflügelschiffschrauben. Jahrb. d. schiffbautechn. Ges. Bd. 28, 1927.

[3]) Kempf, Dem Nachstrom angepaßte Propeller. Werft, Reederei, Hafen. 1924, S. 93.

peller veränderte Druckverteilung am Fahrzeug die Vorgänge der Grenzschichtablösung und damit den Fahrzeugwiderstand verändert. Ueber diesen Punkt wissen wir leider heute noch sehr wenig. Versuche zur Klärung dieser Fragen sind in der aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen in Vorbereitung.

Ich habe versucht, soweit es in der kurzen Zeit möglich ist, Ihnen einen Ueberblick über die wichtigsten Propellerfragen zu geben. Für den alleinfahrenden Propeller ist der Stand unserer Kenntnisse einigermaßen befriedigend. Die wichtigsten und noch am meisten zurückgebliebenen Aufgaben bietet das Zusammenarbeiten von Fahrzeug und Propeller. Aber auch hier sind erfreuliche Ansätze vorhanden und es ist zu hoffen, daß man Schritt für Schritt auch in das hier noch bestehende Dunkel eindringt.

845, 4

5. Vorführung eines hydrodynamischen Films.

Von **L. PRANDTL** in Göttingen.

Der Film, den ich zuerst gelegentlich meines Vortrages vor der Royal Aeronautical Society in London[1]) gezeigt habe, behandelt die Bildung von Wirbeln hinter verschiedenen Objekten und ist deshalb sehr geeignet, zu zeigen, wie diese Wirbelbildung vor sich geht. Der Film besteht aus zwölf kurzen Stücken, von denen jedes einen Strömungsvorgang darstellt[2]). Die Aufnahmen sind nach der von Professor Ahlborn ausgearbeiteten Methode gewonnen, das Objekt wird mittels eines Wagens durch das ruhende Wasser geschleppt und die Kamera fährt — wenigstens bei der Mehrzahl der Bilder — mit dem Objekt mit, wodurch der Eindruck entsteht, als ob das Wasser strömte. Die Bewegung des Wassers wird dadurch sichtbar gemacht, daß feine Aluminiumflitterchen oder auch Grießkörnchen auf das Wasser gestreut sind. Bei der Verwendung von Aluminium ergibt sich dabei noch folgendes: Durch Kapillaranziehung bildet sich am Objekt selbst eine Anreicherung des Aluminiums und es werden dadurch die Flüssigkeitsteile, die ursprünglich am Objekt angelegen sind, besonders gekennzeichnet; sie bilden auch in der Folgezeit deutliche weiße Streifen und beweisen, daß die Trennungsschicht, die den Wirbel bildet, aus solchen Flüssigkeitsteilchen besteht, die mit dem Körper in nahe Berührung gekommen sind.

Dem Film schicke ich einige Lichtbilder voraus, um Sie in die Materie einzuführen. (Es folgen Lichtbilder über die Strömung um Zylinder und Tragflügel und andere Objekte, vergl. den Londoner Vortrag.)

Die ersten zwei Stücke des Films beziehen sich auf die Bildung von Wirbeln hinter einer Platte beim Bewegungsbeginn, und zwar gibt das erste Stück eine Uebersicht über den ganzen Vorgang und das zweite gibt Einzelheiten dessen, was an einer Ecke passiert, in größerem Maßstabe wieder. Stück 3, 4 und 5 zeigt Ihnen die Vorgänge bei der Anfahrt eines Tragflügels, und es ist hier besonders schön zu erkennen, daß die Trennungsfläche, die den Anfahrwirbel bildet, aus den ursprünglich am Flügel angelegenen Teilchen besteht. Bei der Aufnahme 3 fährt der Aufnahmeapparat mit dem Flügel mit. Bei Aufnahme 4 dagegen fährt er nicht mit und man sieht jetzt, nachdem der Tragflügel verschwunden ist, den Anfahrwirbel sich am Platze weiter drehen. Bei der Aufnahme 5 wird der Flügel ein kurzes Stück bewegt und dann wieder still gesetzt. In diesem Falle wird die Zirkulation um den Flügel durch Ablösung an der Hinterkante wieder als Wirbel frei und vereinigt sich mit dem Anfahrwirbel zu einem Wirbelpaar, das sich nach den Helmholtzschen Gesetzen weiterbewegt. Stück 6 und 7 zeigt den Strömungsvorgang an einem Zylinder bei Beginn von der Ruhe aus, und zwar 6 den Vorgang im ganzen, 7 eine Großaufnahme der hinteren Zylinderhälfte. Man erkennt besonders an der Großaufnahme deutlich, daß die Strömung sich zuerst hinten wieder schließt, wie sie sich vorn geöffnet hat, daß aber dann unter der Wirkung des Druckanstieges in einer dünnen Schicht eine Rückströmung einsetzt und nun das Gebiet der Rückströmung immer mehr anschwillt und zu einem Wirbel wird. Die Rückströmung löst sich selbst auch wieder ab und bildet einen kleinen sekundären Wirbel. Das 8. Stück gibt die entsprechenden Vorgänge an einem großen, flach gewölbten Körper wieder. Die Geschwindigkeit ist hierbei sehr klein gewählt worden, um eine besonders dicke Grenz-

[1]) »The Generation of vortices in fluids of small viscosity«, abgedruckt im Journal of the Roy. Aeron. Soc. 31 (1927), S. 120; eine Veröffentlichung in deutscher Sprache ist in der Zeitschr. für Flugtechnik 1927, Heft 21, erschienen.

[2]) Die Stücke 2, 8 und 10 sind neu, sie sind in London noch nicht gezeigt worden.

schicht zu erhalten. Die Aufnahme ist mit 4 Bildchen in der Sekunde erfolgt, um bei der Vorführung (rd. 16 Bildchen/sek) noch einen guten Bewegungseindruck zu bekommen. Trotz der Verschnellerung entwickelt sich die Rückströmung hier besonders langsam und ist sehr deutlich zu sehen.

Die nächsten Aufnahmen zeigen die verschiedenen Möglichkeiten, durch Einwirkung auf die wandnahen Flüssigkeitsschichten die Wirbelbildung zu beeinflussen. Das 9. Stück zeigt die Vorgänge bei einem schnell rotierenden Zylinder. Hier bleibt der Wirbel der einen Seite vollständig aus, weil an der Zylinderoberfläche keine Verzögerung der Flüssigkeit eintritt; in Verbindung mit dem allein entstandenen anderen Wirbel erscheint eine zirkulatorische Umströmung des Zylinders, die dann verbleibt und die die Ursache des Auftriebs des rotierenden Zylinders ist. Das 10. Stück zeigt die Wirkung der Absaugung der wandnahen Schichten bei einem Kreiszylinder. Es wird in dem einen hinteren Quadranten Flüssigkeit nach dem Innern des Zylinders abgesaugt und so dasjenige Material weggenommen, das den Wirbel erzeugen würde. In der Tat bleibt der eine der beiden Wirbel hier vollständig aus.

Die letzten beiden Filmstücke zeigen eine Strömung in einem Kanal mit Absaugung der wandnahen Schichten. Zuerst ist die Absaugung nicht im Gang und man erhält an der Stelle, wo der Kanal sich erweitert, den gewöhnlichen Strahl. Jetzt wird die Absaugung an einer Seite in Gang gebracht (das Erscheinen einer Hand zeigt dies an) und nun legt sich sehr bald die Strömung an einer Seite an. Wie die Strömung aussieht, wenn die Absaugung auf beiden Seiten in Gang ist, zeigt das letzte Stück. Es ergibt sich der sehr ungewöhnliche Anblick einer Potentialströmung mit starker Verzögerung. Nun wird die Absaugung auf der einen Seite abgestellt und sofort beginnt sich der Strom unter Bildung eines charakteristischen Wirbels von dieser Seite abzulösen. 845, 5

6. Angenäherte Berechnung von Schwingungszahlen mit Hilfe des Seilpolygons.

Von **O. FÖPPL** in Braunschweig.

Wir nehmen ein Seil an, das mit der Kraft H zwischen 2 Punkten a und b gespannt ist und auf dem mehrere Massen $m_1, m_2, m_3 \ldots$ sitzen. Die Eigenmasse des Seiles wird vernachlässigt. Bei der Schwingung 1. Ordnung sind alle Massen gleichzeitig nach der gleichen Seite ausgelenkt. Im Umkehrpunkt der Schwingung, der durch Beifügung des Index Null gekennzeichnet werden soll, hat also das Seil die unten eingezeichnete schwingungselastische Linie mit den Ausschlägen $\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30} \ldots$ Der Ausschlag des Punktes n zu einer beliebigen Zwischenzeit ist $\xi_n = \xi_{n0} \cos \frac{2\pi t}{T_1}$, wobei die Schwingungsdauer 1. Ordnung mit T_1 bezeichnet ist und zur Zeit $t = 0$ der größte Ausschlag ξ_{n0} vorliegt.

Im Umkehrpunkt der Schwingung wird auf die Masse m_n eine Kraft

$$P_{n0} = -\, m_n \left(\frac{d^2 \xi_n}{d t^2}\right)_{t=0} = m_n \xi_{n0} \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 \left(\cos \frac{2\pi t}{T_1}\right)_{t=0} = m_n \xi_{n0} \omega_1{}^2$$

ausgeübt. Für $\frac{2\pi}{T_1}$ haben wir die Winkelgeschwindigkeit ω_1 eingeführt. Die Formänderungsarbeit A_F, die im Seil in der äußersten Lage steckt, ist nach einem bekannten Satze der Festigkeitslehre gleich $^1/_2 \sum_1^m P_{n0} \xi_{n0}$, also:

$$A_F = {}^1/_2 \Sigma P_{n0} \xi_{n0} = {}^1/_2 \omega_1{}^2 \Sigma m_n \xi^2{}_{n0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Es ist also:

$$\omega_1{}^2 = \frac{\Sigma P_{n0} \xi_{n0}}{\Sigma m_n \xi^2{}_{n0}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Nach dem obigen Ansatz für P_{n0} ist:

$$P_{n0} = m_n \xi_{n0} \omega_1{}^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

In den Gleichungen (2) und (3) sind ξ_{n0}, P_{n0} und ω_1 unbekannt. Wir schätzen die Größen ξ_{n0} und beachten, daß die Schwingungsdauer nicht von der absoluten Größe der Werte ξ_{n0} abhängt; die geschätzten Größen nennen wir ξ'_{n0}. Wir können unter Benutzung von Gl. (3) eine Seillinie konstruieren, für Belastungen $P'_{n0} = \alpha \cdot \xi'_{n0} \cdot m_n$, wobei wir für α einen beliebigen Wert annehmen. Die Durchhängungen dieser Seillinie nennen wir ξ''_{n0} und erhalten die Formänderungsarbeit des Seiles zu

$$^1/_2 \Sigma P'_{n0} \xi''_{n0} = {}^1/_2 \alpha \Sigma m_n \xi'_{n0} \xi''_{n0}.$$

Wenn die erhaltene Seillinie gleich der wirklichen schwingungselastischen Linie wäre ($\xi''_{n0} = \xi_{n0}$), dann könnten wir die Formänderungsarbeit auch nach Gl. (1) berechnen zu $^1/_2\ \omega_1{}^2 \Sigma m_n\ \xi''{}^2_{n0}$; also:

$$\omega_1{}^2 = \frac{a \Sigma m_n \xi'_{n0} \xi''_{n0}}{\Sigma m_n \xi''{}^2_{n0}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Dann wären die ξ''_{n0} verhältnisgleich den ξ'_{n0}. Gl. (4) wäre dann streng gültig. Aber auch bei Fehlern in der Schätzung kann mit Hilfe der Gl. (4) die Schwingungsgeschwindigkeit angenähert berechnet werden. Die neue Seillinie mit den Durchhängungen ξ''_{n0}

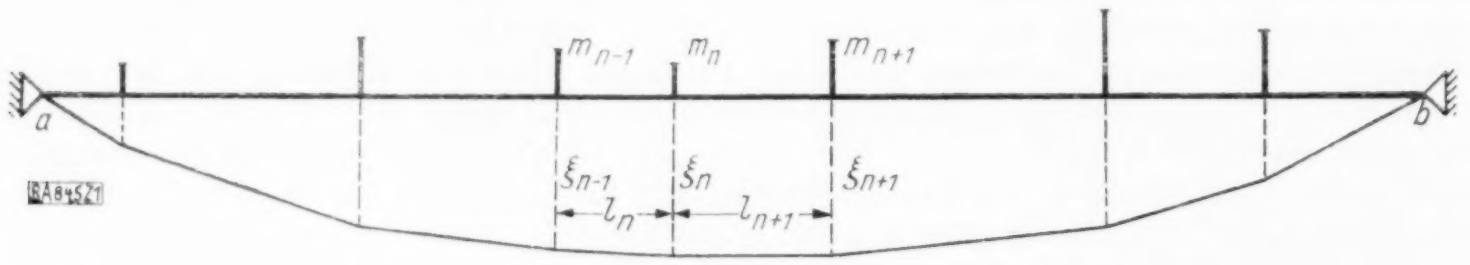


Abb. 1.

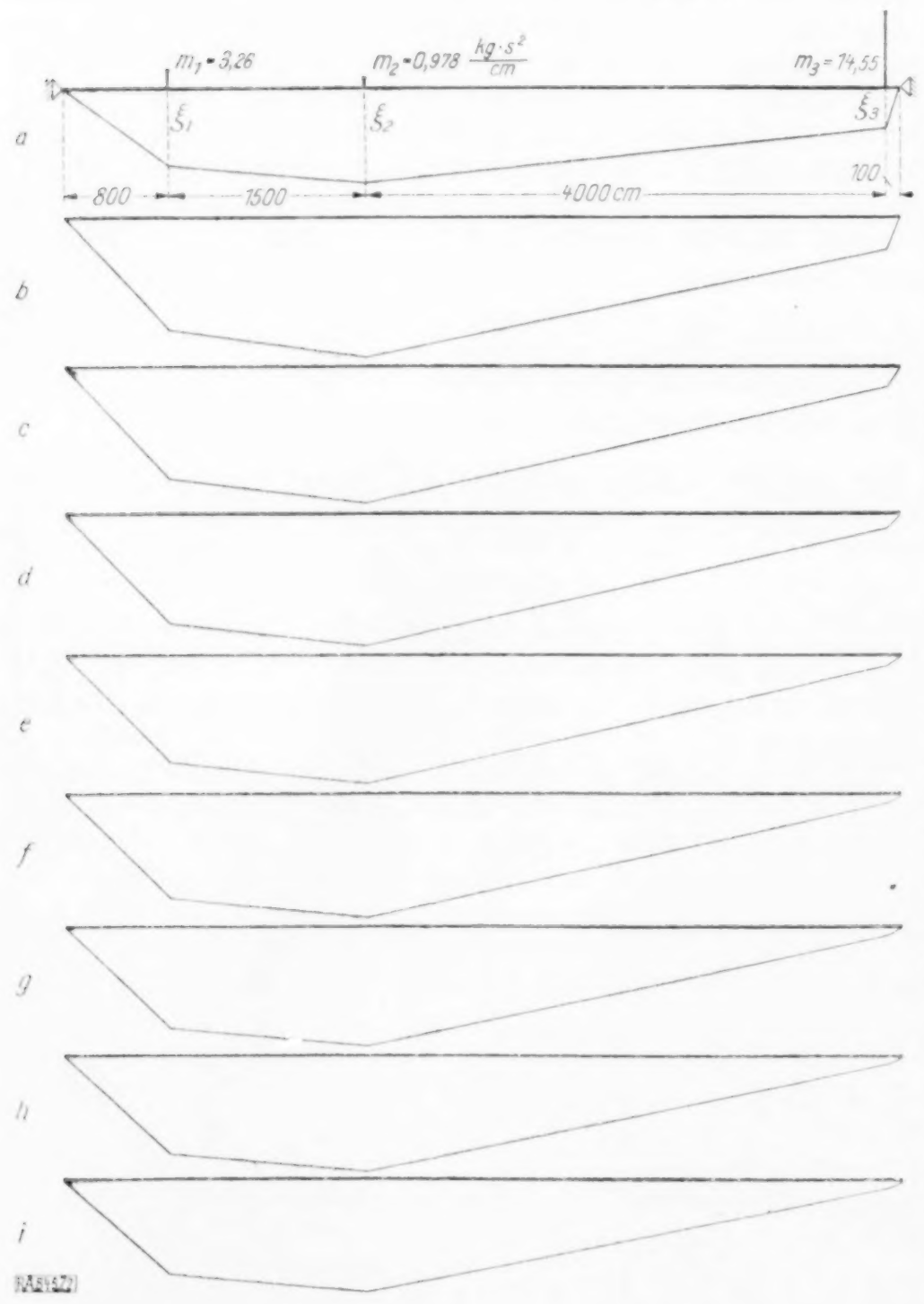


Abb. 2.

ist auf alle Fälle bei Schwingungen 1. Ordnung der tatsächlichen schwingungselastischen Linie ähnlicher als die ursprüngliche mit den Durchhängungen ξ'_{n0}. Eine weitere Annäherung erhalten wir, wenn wir mit Hilfe der erhaltenen Durchhängungen ξ''_{n0} neue Kräfte $P''_n = \alpha\ \xi''_{n0}\ m_n$ bilden und damit neue Durchbiegungen ξ'''_{n0} ermitteln usw. Wir haben ein ähnliches Annäherungsverfahren wie das, das bei der Berechnung von Biegungsschwingungszahlen von Wellen vielfach angewendet wird[1]).

Für die erste Annäherung kann man, wenn keine bessere Schätzung möglich ist, die sehr rohe Annahme machen, ξ'_{n0} sei für alle Massen konstant. Wir können dann das beliebig zu wählende α gleich g/ξ'_{n0} (mit g = Erdbeschleunigung) setzen und erhalten die Seillinie, die unter der Schwerewirkung der Massen ($P_{n0} = g\ m_n$) zustande kommt[2]). Wenn wir die zugehörigen Durchhängungen mit ξ''_{gn} bezeichnen, dann ist das Ergebnis dieser ersten rohen Annäherung:

$$\omega_1{}^2 = \frac{g \Sigma m_n \xi''_{gn}}{\Sigma m_n \xi''{}^2_{gn}} \quad (5).$$

[1]) Ueber die Annäherungsverfahren zur Berechnung der Biegungsschwingungszahlen von Wellen siehe R. Grammel, Erg. d. Naturwissenschaften, Bd. I, S. 92.

[2]) Für Biegungsschwingungen kommt man mit dieser Annahme auf das Kullsche Annäherungsverfahren (Zeitschr. d. V. d. I. (1918), Heft 18 und 19).

In Abb. 2 haben wir für eine besonders ungleichmäßige Lastverteilung die Annäherung durchgeführt. Abb. 2a gibt die elastische Linie unter dem Eigengewicht $m_n \cdot g$ mit den Durchhängungen ξ'_n an, aus der die weiteren Durchhängungen ξ''_n, ξ'''_n . . . in Abb. 2b, 2c . . . folgen. Die Fehlergrößen, die bei der Berechnung von ω_1 nach Gl. (4) auftreten, sind für die einzelnen Annäherungsschritte in Abb. 3 angegeben [1]).

1. Bestimmung von Schwingungsdauern höherer Ordnung. Wir beziehen uns auf die Schwingungsanordnung mit 2 Massen (Abb. 4). Bei der Schwingung 2. Ordnung liegen in der Totlage beide Massen auf verschiedenen Seiten der Mittellinie. Wenn wir den Knotenpunkt K angeben können, d. h. den Schnittpunkt des mittleren Seilstückes mit der Mittellinie, dann ist die Aufgabe auf den Fall der Schwingung 1. Ordnung zurückgeführt. Die richtige Lage von K ist von der Art, daß die Seilstücke rechts und links von K Schwingungen 1. Ordnung von gleicher Schwingungsdauer ausführen.

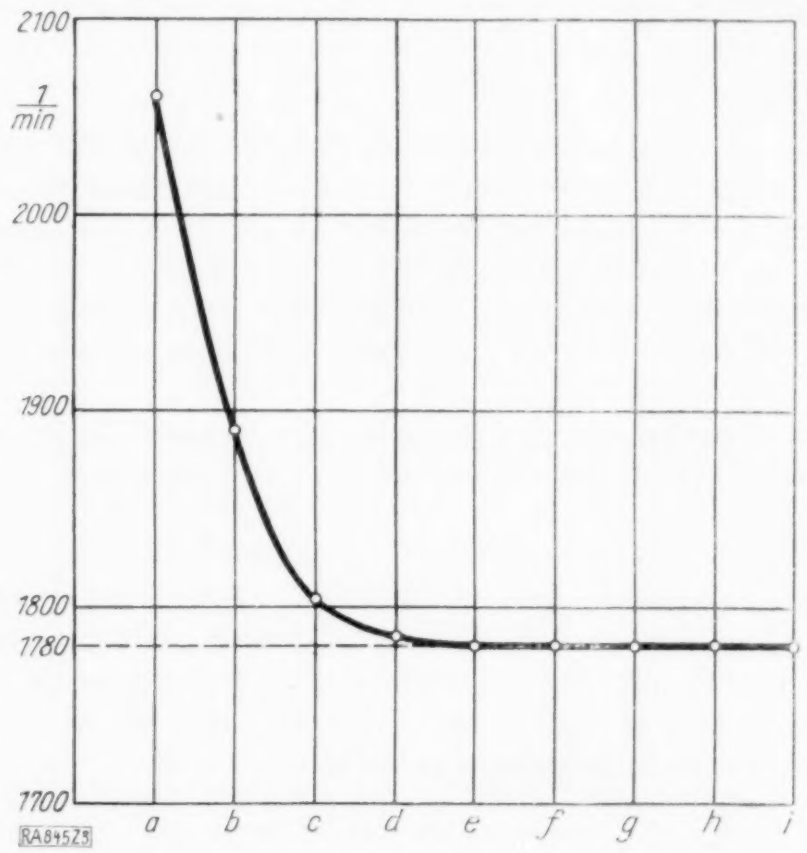


Abb. 3.

Wir schätzen die Lage von K und nehmen etwa an, es falle mit dem Schwerpunkt S zusammen. Den Punkt nennen wir K'. Unter der Annahme, K' sei der wirkliche Knotenpunkt, können wir bei 2 Massen sofort die Seillinie angeben, da es auf die absoluten Größen von ξ' nicht ankommt (die ausgezogene Linie in Abb. 4). Wir nehmen einen beliebigen Wert α an, bilden wieder die Kräfte $P' = \alpha\, m\, \xi'$ und zeichnen unter Beibehaltung von K' die Seillinie für die beiden Teilstücke (die gestrichelte Linie in Abb. 4). Wenn wir K' richtig gewählt haben, dann fallen die beiden Seilstücke rechts und links von K' in eine Gerade. Im allgemeinen wird aber K' nicht richtig gewählt sein und deshalb ein Knick an der Stelle K' auftreten, d. h. es müßte zur Aufrechterhaltung der beiden Teilschwingungen noch eine zusätzliche Kraft in K' beigefügt werden. Wir können Gl. (4) auf jede der beiden Teilschwingungen anwenden. Da nur eine Masse auftritt, ist

$$(\omega_1{}^2)_1 = \frac{\alpha\, \xi'_{10}}{\xi''_{10}} \quad \text{bzw.} \quad (\omega_1{}^2)_2 = \frac{\alpha\, \xi'_{20}}{\xi''_{20}} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

wobei mit ξ'_{10} wieder die ursprünglich gewählte Auslenkung und mit ξ''_{10} die unter der Kraft $\alpha\, m\, \xi'_{10}$ erfolgende Auslenkung bezeichnet sind. Die zweite Gl. (6) bezieht sich auf das zweite Teilstück des Seiles. Es schwingt diejenige der beiden Teilschwingungen rascher, bei der das Verhältnis der angenommenen Durchhängung ξ_0' zur abgeleiteten ξ_0'' größer ist, d. h. in Abb. 4 die linke Teilanordnung. Wir schließen daraus, daß der Knotenpunkt K weiter nach rechts verschoben werden muß, und erhalten mit einem neu angenommenen Knotenpunkt K'' eine bessere Annäherung (strichpunktierte Linie in Abb. 4).

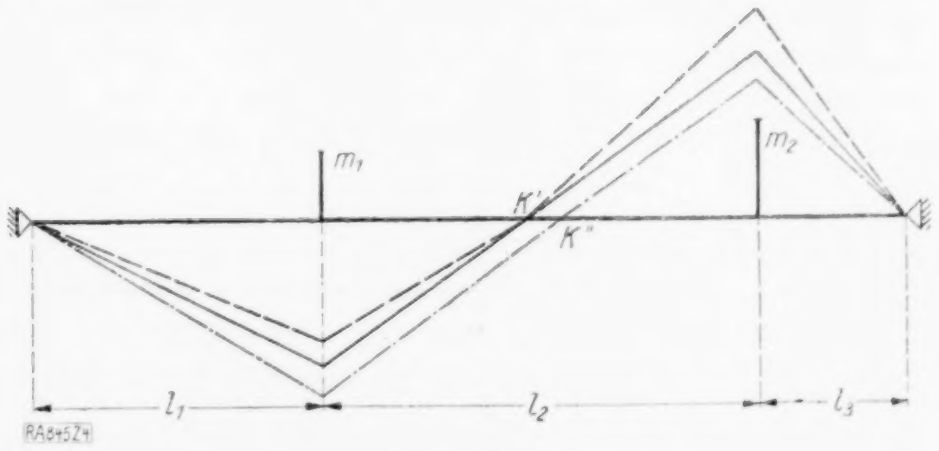


Abb. 4.

[1]) Ein ähnliches Verfahren, bei dem aber die Absolutwerte der Durchhängungen keine Rolle spielen, habe ich in der »Schweiz. Bauzeitung« 1927, S. 303 mitgeteilt. Bei der Anwendung jenes Verfahrens hat man eine schlechtere Annäherung, dafür aber den Vorteil, daß man sich um den Maßstab des Seilpolygons nicht zu kümmern braucht.

Hätten wir den Knotenpunkt K' nicht festgehalten, sondern die Seillinie einfach für die Belastungen $P_1 = \alpha\, m_1\, \xi_1'$ und $P_2 = \alpha\, m_2\, \xi_2'$ gezeichnet, so wäre der Knotenpunkt von K' aus nach links — also nach der falschen Seite — gerutscht. Daraus folgt, daß die einfache Uebertragung des Verfahrens der 1. Ordnung auf die 2. Ordnung ohne Festhalten des Knotenpunktes keine Annäherung, sondern eine Entfernung vom wahren Ergebnis zur Folge hat. Die Lage des Knotenpunktes bei der 2. Ordnung ist für dieses Annäherungsverfahren labil. Um also bei der Schwingung 2. Ordnung zum Ziele zu kommen, muß man den geschätzten Knotenpunkt bei der Konstruktion festhalten und entgegengesetzt der Richtung verschieben, nach der er bei nicht festgehaltenem K rutschen würde[1]).

2. Uebertragung des Verfahrens auf andere Schwingungsvorgänge. Das vorstehend entwickelte Verfahren hat deshalb größere Bedeutung, weil es auch zur Berechnung von anderen technisch wichtigen Schwingungaufgaben verwendet werden kann.

In Abb. 5a ist das gespannte Seil dargestellt. Die Beschleunigung der zwischenliegenden Masse m_n erfolgt nach der Gleichung:

$$m_n \frac{d^2\,\xi_n}{d\,t^2} = -\,H\left(\frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{l_n} - \frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{l_{n+1}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7\,\mathrm{a}).$$

Ebenso erfolgt die Beschleunigung der Masse m_n im Falle Abb. 5b, wo Massen zwischen Zug- und Druckfedern schwingen, nach der Gleichung:

$$m_n \frac{d^2\,\xi_n}{d\,t^2} = -\,c_0\left(\frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{l_n} - \frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{l_{n+1}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7\,\mathrm{b}).$$

Statt des Seilzuges H tritt die Elastizitätszahl c_0 auf, die mit der Auslenkung multipliziert und durch die Federlänge dividiert die Federkraft ergibt. Im Falle 5c — Drehschwingung von Massen, die auf Wellen sitzen — hängt die Schwingung von den Trägheitsmomenten J, den Verdrehungswinkeln $\Delta\varphi$ und der Wellenverdrehungszahl d_0 ab[2]). Für eine zwischenliegende Schwungmasse ist:

$$J_n \frac{d^2\,\Delta\varphi_n}{d\,t^2} = -\,d_0\left(\frac{\Delta\varphi_n - \Delta\varphi_{n-1}}{l_n} - \frac{\Delta\varphi_{n+1} - \Delta\varphi_n}{l_{n+1}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7\,\mathrm{c}).$$

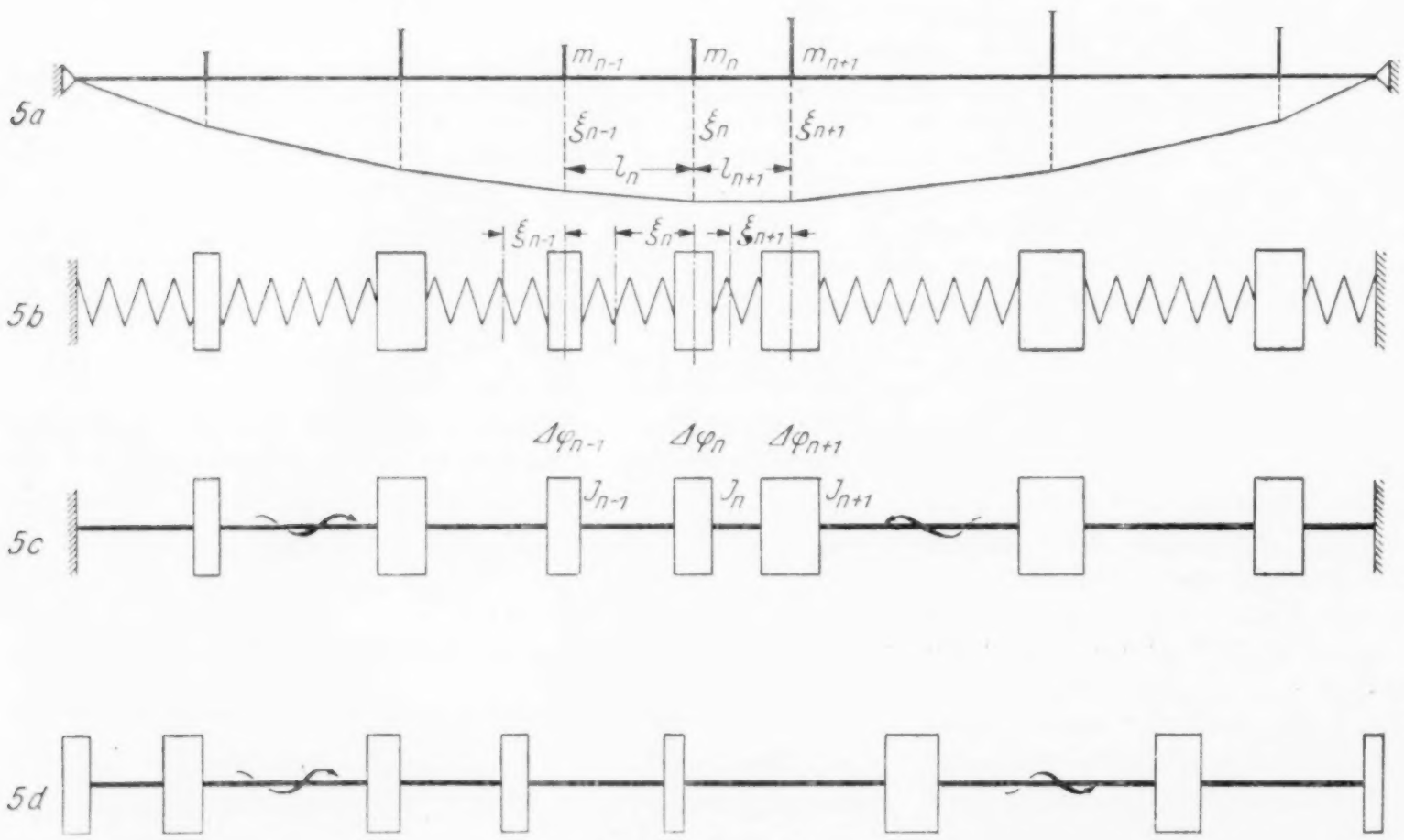


Abb. 5a bis 5d.

[1]) Die vorliegende Ueberlegung kann nicht ohne weiteres auf die Berechnung von Biegungsschwingungen übertragen werden, da bei der Biegung in jedem Querschnitt außer der Kraft auch ein Moment übertragen wird. Ich stimme deshalb einer Diskussionsbemerkung des Hrn R. Grammel bei, daß man mit der Anwendung einer ähnlichen Ueberlegung zur Bestimmung des Knotenpunktes bei Biegungsschwingungen nicht zum Ziele kommt.

[2]) Die Reduktion von Wellenstärken verschiedenen Durchmessers auf gleiches d_0 ist in O. Föppl, Grundzüge der Techn. Schwingungslehre, Berlin 1923, durchgeführt.

Die 3 Gleichungen sind gleich aufgebaut; sie sind nur dadurch voneinander verschieden, daß ihre Größen verschiedene Bedeutung haben. Wir können demnach die besondere Lösung mit Hilfe des Seilzuges, die wir für die erste gefunden haben, auch für eine der beiden anderen, z. B. für die Wellenberechnung verwenden. Wir müssen zu diesem Zweck nur das J in einem geeigneten Maßstab in m, das $\Delta\varphi$ in ξ und das d_0 in H ausdrücken.

Es läßt sich ferner zeigen, daß die Schwingungsanordnung Abb. 5c in einzelne Teilanordnungen von gleicher Schwingungsdauer zerlegt werden kann, deren Schwingungsdauer nur vom Produkt Masse mal Länge des Wellenstücks abhängt. Für die Größe dieses Produktes ist es gleichgültig, welcher der beiden Faktoren die Masse und welcher die Länge des Wellenstückes angibt. Wir können deshalb beide Größen in irgend einem Maßstab gegeneinander vertauschen, ohne die Schwingungsdauer zu verändern. Aus Abb. 5c wird auf diese Weise 5d, bei der die Endmassen frei gegeneinander schwingen. Auch in diesem Fall kann also die Schwingungsdauer mit Hilfe des Seilpolygons gefunden werden. Und gerade die Berechnung von Eigenschwingungszahlen bei Anordnungen nach Abb. 5d ist im praktischen Maschinenbetriebe von großer Bedeutung. 845, 6

7. Ueber die numerische Ermittlung verborgener Periodizitäten.

Von **FELIX BERNSTEIN** in Göttingen.

Das Problem der Ermittlung verborgener Periodizitäten umfaßt eine Anzahl verschiedener Probleme, je nach der Art der Gegebenheit der Beobachtungswerte und der Art der zu prüfenden Hypothese über den zugrunde liegenden Vorgang.

Die bisher angewendeten Methoden leiden an dem Uebelstande, daß sie nicht nur sehr weitläufige Rechnungen erfordern, wie z. B. die Methode von Schuster, sondern auch daran, daß durchweg der Sicherheitsgrad des erlangten Ergebnisses nicht abzuschätzen ist und daß daher auch keine Gewähr dafür gegeben ist, daß die rechnungsmäßig erhaltenen Perioden auch wirklich solche sind, die reale Bedeutung haben. Diese Verfahren ermangeln oft genug der Eindeutigkeit und so ist es nicht zu verwundern, daß in einer Anzahl naturwissenschaftlich sehr wichtiger Fragen ungeklärter Streit darüber herrscht, ob die fraglichen Vorgänge überhaupt und welche Perioden sie besitzen. So erhielten z. B. Brückner und Köppen in der Frage der Klimaperioden widersprechende Ergebnisse.

Die im folgenden vorgeschlagene Methode liefert ein eindeutiges Verfahren, nach hypothetischer Annahme einer bestimmten Periodenzahl diese mit ihren Präzisionen zu bestimmen, wenn die Präzisionen der Beobachtungen bekannt oder ermittelt sind.

Damit ist die dem Rechner zu stellende Aufgabe gelöst, denn die weitere Beurteilung, ob eine angenommene Periodenzahl richtig war oder ob entweder erhaltene Perioden nicht als solche anerkannt werden können oder neue hinzugefügt werden müssen, verwandelt sich damit in die Frage, welche mittleren Fehler für die jeweils errechneten Perioden noch als zulässig gelten sollen.

Die Beantwortung dieser Frage hängt von der Natur des Einzelproblems ab. Deshalb ist die Bestimmung der wahren Zahl der Perioden schwerlich anders als durch ein Probieren zu lösen, für das im konkreten Falle die zu prüfende Theorie des Vorgangs oder die Erfahrung über Darstellungserfolge genügenden Anhalt für eine von der Wahrheit wenig entfernte Erstvermutung geben wird. Das mathematische Problem für eine exakt gegebene Funktion, von der man weiß, daß sie nur endlich viele Perioden hat, die deren Anzahl bestimmen, hat Laplace behandelt. Ein angewandtes Interesse hat es, soweit ich sehe, nicht.

Der Grundgedanke der hier vorgeschlagenen Methode besteht darin, durch eine Funktionaltransformation, deren einfachster Fall die Laplace-Transformation ist, das Problem zu algebraisieren.

Die Tragweite des Gedankens ist nicht auf die Bestimmung von Perioden beschränkt, sondern es lassen sich zugleich auch etwaige aperiodische Glieder ermitteln.

Mittels der Transformation

$$\varphi(\tau) = L(f) = \int e^{-\tau\nu} f(\nu)\, d\nu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

deren Integrationsweg noch geeignet zu wählen ist, verwandelt sich die Oberfunktion f in die Unterfunktion $L(f)$. Ist insbesondere f die Exponentialfunktion $e^{\alpha\nu}$, so ist ja das unbestimmte Integral

$$\int e^{-\nu(\tau-\alpha)}\, d\nu = \frac{e^{-\nu(\tau-\alpha)}}{-(\tau-\alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

und es kann der Integrationsweg so gewählt werden, daß lediglich das algebraische Glied $\frac{1}{\tau - \alpha}$ übrig bleibt. Hierzu genügt es z. B., denselben von Null beginnen zu lassen und so zu führen, daß der integrierte Ausdruck an der oberen Grenze verschwindet.

Der gebräuchlichste Integrationsweg beginnt bei Null und geht über alle reellen v bis $+\infty$. Wir schreiben

$$L(f) = \int_0^\infty e^{-\tau v} f(v)\, dv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und bezeichnen dies im engeren Sinne als Laplace-Transformation.

Für $f = e^{\alpha v}$ ist hier

$$\text{Reeller Teil von } (\tau - \alpha) > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

zu verlangen, damit

$$L(e^{\alpha v}) = \frac{1}{\tau - \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

gilt.

Besteht die zu prüfende Hypothese darin, daß

$$f(v) = A_1 e^{\alpha_1 v} + A_2 e^{\alpha_2 v} + \ldots + A_n e^{\alpha_n v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

sein soll, so liefert (5)

$$L(f) = \frac{A_1}{\tau - \alpha_1} + \frac{A_2}{\tau - \alpha_2} + \ldots \frac{A_n}{\tau - \alpha_n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Dabei muß τ so gewählt sein, daß (4) für alle α gleichzeitig erfüllt ist. Sind z. B. die sämtlichen α rein imaginär, so genügt es, τ positiv zu wählen. Dagegen, wenn z. B. neben periodischen etwa aperiodische Glieder mit bestimmt werden sollen, so genügt dieselbe Bedingung nur, wenn die aperiodischen Terme sämtlich mit wachsendem v gegen Null streben.

Wird nun der Ausdruck (7) für verschiedene Werte $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_{2n}$ gebildet, so entsteht ein System von algebraischen Bestimmungsgleichungen, aus denen die wesentlichen Unbekannten $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ bestimmt werden können. Die Koeffizientenbestimmung der $A_1, A_2 \ldots A_n$ ist nachträglich leicht.

Um die Natur der algebraischen Gleichungen zu übersehen, schreiben wir (7) in der Form

$$L_i(f) = \frac{h_{n-1}(\tau_i)}{g_n(\tau_i)} \quad i = 1, 2 \ldots 2_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8),$$

wo

$$h_{n-1}(\tau_i) = c_0 + c_1 \tau_i + \ldots c_{n-1} \tau_i^{n-1}, \qquad g_n(\tau_i) = g_0 + g_i \tau_i + \ldots \tau_i^n \quad . \quad (9)$$

ist, oder

$$(g_0 + g_1 \tau_i + \ldots \tau_i^n) L_i(f) = c_0 + c_1 \tau_i + \ldots + c_{n-1} \tau_i^{n-1} \quad \ldots \quad (10).$$

Wir haben also ein System von $2n$ linearen Gleichungen mit $2n$ Unbekannten, aus dem wir nach Elimination der c die g und damit vermöge

$$g_n(\tau) = (\tau - \alpha_1)(\tau - \alpha_2) \ldots (\tau - \alpha_n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

die α als Wurzel einer algebraischen Gleichung bestimmen können. Nachdem dies geschehen, benutzt man zur Bestimmung der A am besten die Gleichungen (7).

Damit ist aber das gestellte Problem nicht gelöst, wie schon eingangs betont wurde, sondern es steht noch die Bestimmung der mittleren Fehler aus, wenn die mittleren Fehler m_v von $f(v)$ gegeben, bezüglich aus der Schwankung der Werte an jeder Stelle bestimmt sind. Es ist, da die Laplace-Transformation ein linearer Prozeß ist, wenn die Beobachtungen an zwei verschiedenen Stellen keine korrelierten Schwankungen zeigen,

$$M^2 = \int_0^\infty m_v^2 e^{-2v\tau}\, dv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

der mittlere Fehler von $L(f)$. Für ein konstantes m nimmt derselbe den Wert

$$M^2 = \frac{m^2}{2\tau} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

an, mit dessen Genauigkeit man sich, wenn nicht Gegengründe vorliegen, begnügen kann.

Der fundamentale Ausdruck (13) zeigt, daß man sehr ungenaue Resultate erhält, wenn man sich auf kleine τ-Werte beschränkt. Ueberdies dürfen auch aus praktischen Gründen die τ-Werte einander nicht zu nahe liegen, wenn die linearen Bestimmungsgleichungen hinreichend verschieden sein sollen.

Hat man auf diese Weise n Werte für die Fundamentalkonstanten α bekommen, so wird man Verbesserungen dieser und der Amplituden A

$$\delta\alpha_1 \ldots \delta\alpha_n; \quad \delta A_1 \ldots \delta A_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

aus den Gleichungen (7) zu bestimmen suchen, indem man ein überzähliges System von Laplace-transformierten $L_i(f)$ $i = 1, 2 - m$ $(> 2n)$ berechnet, und die Gleichungen der Verbesserungen

$$L(f) = \frac{A_1^0}{\tau - \alpha_1^0} + \ldots \frac{A_n^0}{\tau - \alpha_n^0} + \frac{\delta A_1}{\tau - \alpha_1^0} + \ldots + \frac{\delta A_n}{\tau - \alpha_n^0} + \frac{\delta\alpha_1 A_1^0}{(\tau - \alpha_1^0)^2} + \ldots + \frac{\delta\alpha_n A_n^0}{(\tau - \alpha_n^0)^2} \quad (15)$$

mit den Gewichten, die sich aus (13) ergeben, nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgleicht.

Wir haben bisher ν stetig variabel angenommen. Für diesen Fall wäre, wenn man volle Ausnutzung der etwa auf photographischem Wege oder durch Rußschreibung gewonnenen Kurve wünscht, ein graphisches oder mechanisches Verfahren zur Gewinnung der Laplace-transformierten am Platze. In der Regel pflegt man jedoch auch dann eine diskrete Anzahl äquidistanter Ordinaten auszumessen. so daß man dann ein $f(\nu)$ hat, wo ν die Werte 0, 1, 2 . . . durchläuft, und sehr häufig ist der letztere Fall der in der Beobachtung gegebene.

In allen Fällen, wo äquidistante Ordinaten vorliegen, wird man zweckmäßig statt der Laplace-Transformation die Transformation

$$\mathcal{A}(f) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f(\nu)\, e^{-\tau\nu} (\nu = 0, 1, 2 \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad : \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

die wir als Lagrange-Transformation bezeichnen wollen, verwenden.

Vermöge

$$\mathcal{A}(e^{\alpha\tau}) = \frac{1}{1 - e^{-(\tau - \alpha)}}, \; R(\tau - \alpha) > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

erhalten wir bei dem Ansatz

$$\mathcal{A}(f) = \frac{A_1}{1 - e^{-\tau} e^{\alpha_1}} + \frac{A_2}{1 - e^{-\tau} e^{\alpha_2}} + \ldots + \frac{A_n}{1 - e^{-\tau} e^{\alpha_n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18),$$

was bei

$$e^{\tau} = \tau^1 \qquad e^{\alpha\nu} = \alpha^{\nu 1} \qquad A_\nu e^{\tau} = A_\nu^1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

in

$$\mathcal{A}(f) = \frac{A_1^1}{\tau^1 - \alpha_1^1} + \frac{A_2^1}{\tau_1 - \alpha_2^1} + \ldots + \frac{A_n^1}{\tau^1 - \alpha_n^1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20),$$

also wieder in die Form (7) übergeht.

An Stelle von (12) und (13) tritt jetzt

$$M^2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} m_\nu^2\, e^{-2\nu\tau}; \quad M^2 = \frac{m^2}{1 - e^{-2\tau}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Die weitere Bestimmung der neuen Fundamentalkonstanten α^1 ist jetzt wieder eindeutig. Aus ihnen bestimmen sich vermöge (19) die Werte der α, die in dem Ansatz (6) jetzt nur auf Vielfache von 2π bestimmt sind. Wir erreichen Eindeutigkeit, indem wir den imaginären Teil von α auf das Intervall 0 bis 2π beschränken.

Schließlich bemerken wir noch, daß wir die Funktion $f(\nu)$ der Beobachtungen sowohl reell, als auch als komplexe Funktion der reellen Variablen ν voraussetzen können. Die Bestimmung der Annäherungswerte sowohl für stetige, als für unstetige Werte von ν geschieht auf dem angegebenen algebraischem Wege. Einzig und allein in der Ausgleichung der Gleichungen (15) nach der Methode der kleinsten Quadrate ist es nötig, Reelles und Imaginäres zu trennen. Der mittlere Fehler sowohl des reellen Teils als des imaginären Teils von $L(f)$ bzw. $\mathcal{A}(f)$ bestimmt sich nach (12) und (13) bzw. (21). Die Gleichungen (15) zerfallen jeweils in zwei Gleichungen, deren jede linear in den reellen bzw. imaginären Teilen der Fundamentalkonstanten und Amplituden sind.

Wir behandeln nun ein Beispiel, bei dem wir die reelle Schreibweise der Einfachheit halber wählen. Die Rechnung wurde von Hrn. Glogowski[1]) durchgeführt.

---

[1]) In seiner Dissertation: Beiträge zur Auffindung verborgener Periodizitäten. Göttingen 1927. Die Dissertation enthält eine kritische Darstellung der bisher angewandten Methoden.

Es wurde

$$f(\nu) = 8 \sin 0{,}63\,\nu - 5 \sin 0{,}15\,\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

auf drei Stellen für die Werte von 0 bis 119 berechnet.

Die Berechnung von $\mathcal{A}(f)$ erfolgt leicht nach dem Hornerschen Schema.

Es wurde

$$\tau_1 = 1{,}317, \quad \tau_2 = 0{,}5, \quad \tau_3 = 0{,}3, \quad \tau_4 = 0{,}963, \quad \tau_5 = 0{,}4, \quad \tau_6 = 0{,}2, \quad \tau_7 = 0{,}8, \quad \tau_8 = 0{,}7 \quad (23)$$

gewählt. Auf der Mercedes Euklid wurde $e^{-\tau}$ fest eingestellt und $f_{119}\, e^{-\tau}$ gerechnet. Dann wurde mittels Addiator $f_{118} + f_{119}\, e^{-\tau}$ gebildet usw.

Bei Benutzung des Millionär ist es praktischer, ständig mit dem Multiplikator $e^{-\tau}$ zu multiplizieren. Sehr angenehm wäre eine Vorrichtung, das Resultat wieder als Multiplikand erscheinen lassen zu können.

In reeller Form schreibt sich die Transformation $\mathcal{A}(f)$ hier

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} e^{-\nu\tau} \sin \alpha\nu = \frac{\sin \alpha}{2\,(\mathfrak{Cof}\,\tau - 1) + \left(2 \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24),$$

wo $2\,\mathfrak{Cof}\,\tau = e^{\tau} + e^{-\tau}$ ist. Setzen wir

$$\tau^1 = 2\,(\mathfrak{Cof}\,\tau - 1), \quad \alpha_i{}^1 = -\left(2 \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

so ist bei dem Ansatz

$$f(\nu) = A_1 \sin \alpha_1 \nu + \ldots A_n \sin \alpha_n \nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26),$$

wo

$$\mathcal{A}(f)_1 = \frac{A_1{}^1}{\tau_1 - \alpha_1{}^1} + \ldots + \frac{A_n{}^1}{\tau^1 - \alpha_n{}^1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

$$A_i = A_1 \sin \alpha_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

ist, womit die Form (7) erreicht ist.

Mittels der angegebenen Berechnungsweise ergab sich für $\mathcal{A}(\tau)$

$$1{,}56; \quad 4{,}41; \quad 2{,}85; \quad 2{,}57; \quad 4{,}20; \quad -1{,}07; \quad 3{,}25; \quad 4{,}12 \ldots \quad (29).$$

Die ersten vier Werte wurden zur Elimination der c_0 und c_1 und zur Bestimmung der g_0 und g_1 in den Gleichungen (10) benutzt.

Als Näherungswerte für $\alpha_1{}^1$ und $\alpha_2{}^1$ ergaben sich aus (11) die Werte

$$\alpha_1{}^1 = 0{,}62; \quad \alpha_2{}^1 = 0{,}17 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Daraus bestimmten sich eindeutig im Intervall 0 bis 2π mittels (25) die Werte

$$\alpha_1 = 0{,}63; \quad \alpha_2 = 0{,}17 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Die endgültige Ausgleichung aus den Gleichungen (15) unter Benutzung der sämtlichen $\mathcal{A}(\tau)$-Werte (29) und unter Benutzung der Gewichte derselben ergab schließlich

$$\left.\begin{array}{ll} A_1 = 8{,}05 \pm 0{,}08 & A_2 = -\ 4{,}97 \pm 0{,}12 \\ \alpha_1 = 0{,}63 \pm 0{,}004 & \alpha_2 = \quad 0{,}173 \pm 0{,}03 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Als Perioden ergeben sich annähernd

$$T_1 = \frac{2\pi}{\alpha_1} \sim 10; \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\alpha_2} \sim 36 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Das Periodogramm von Schuster ergibt für die erste Periode 11 statt 10, die zweite Periode ist auch bei 239 Werten noch nicht nachweisbar. Wie wenig die Methode von Schuster die gegebenen Werte ausnützt, geht auch daraus hervor, daß die erste Periode ganz ebenso herauskommt, wenn man statt aller positiven Ordinaten $+1$ statt der negativen -1 setzt.

Von Dale wurde eine Methode angegeben, gleichfalls die Fundamentalkonstanten algebraisch zu bestimmen, und dasselbe ist der Sinn der frühesten angegebenen Methode von Lagrange. Jedoch ist kein haltbarer Versuch gemacht, den Fehler des Resultates abzuschätzen. Die Methode von Lagrange hat überhaupt niemals Verwendung gefunden.

8. Theorie der Statistik seltener Ereignisse.

Von **H. POLLACZEK-GEIRINGER** in Berlin.

Ein statistisches Material, bestehend aus N »Beobachtungen«, sei in der Weise geordnet, daß zu jedem Beobachtungsergebnis x die Anzahl $f(x)$ angegeben ist, in der das Ergebnis innerhalb der N Beobachtungen aufgetreten ist. Man habe etwa in $N = 100$ Monaten die Knabenquote auf je $n = 500$ Neugeborene beobachtet, es sei dabei z. B. die Zahl $x = 200$ (200 Knaben auf 500 Geburten), $f(x) = 1$ mal; $x = 201$, $f(x) = 3$ mal, . . . $x = 248$, $f(x) = 20$ mal aufgetreten, u. s. f. . . .; man kann die beobachteten »relativen Häufigkeiten« der einzelnen x, daß sind die Zahlen $\frac{1}{100}, \frac{3}{100}, \ldots \frac{20}{100}, \ldots$ vergleichen mit einem theoretischen Wahrscheinlichkeitsablauf $\mathfrak{w}_n(x) = \mathfrak{w}_{500}(x)$ für das Auftreten von gerade 200, 201, . . . 248, . . . Knabengeburten unter 500 Geburten. Dieser letztere ist bekanntlich durch die Formel:

$$\mathfrak{w}_n(x) = \binom{n}{x} q^x (1-q)^{n-x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

gegeben, wenn q die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Knabengeburt bedeutet; q ist eine Zahl nahe $^1/_2$, die man, um den Vergleich durchzuführen, aus dem gegebenen Beobachtungsmaterial zu $\frac{1}{n}\left[\sum_x x \frac{f(x)}{N}\right]$ rechnet; denn wären die $\frac{f(x)}{N}$ genau gleich den $\mathfrak{w}_n(x)$, so wäre q bekanntlich genau gleich $\frac{1}{n}\sum_x x\,\mathfrak{w}_n(x)$. Wenn dann die Kurven der beobachteten relativen Häufigkeiten $\frac{f(x)}{N}$ und die der theoretischen Wahrscheinlichkeiten $\mathfrak{w}_n(x)$ einen annähernd übereinstimmenden Verlauf zeigen, so kann man mit Recht sagen, man habe die gegebenen statistischen Zahlen wahrscheinlichkeitstheoretisch »erklärt«, im Sinne einer Einreihung eines Einzelfalles in eine theoretisch fundierte Kette von Zusammenhängen.

In der Wahrscheinlichkeitstheorie versteht man bekanntlich unter der Formel für die »Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse« die Poissonsche Formel

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{w}_n(x) = \psi_0(x) \equiv \frac{a^x}{x!} \cdot e^{-a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

$\mathfrak{w}_n(x)$ ist dabei die durch (1) gegebene Wahrscheinlichkeit dafür, in n Zügen x-mal ein bestimmtes Ergebnis zu erzielen, für dessen jeweiliges Eintreten die Wahrscheinlichkeit q besteht; (2) geht aus (1) durch Grenzübergang zu unendlichem n bei festgehaltenem Erwartungswert $a = nq$ (also bei unbegrenzt — wie $1/n$ — abnehmender Wahrscheinlichkeit q) hervor. Sie ist wohl zu unterscheiden von der durch den Laplaceschen Grenzübergang zu unendlichem n bei festgehaltener Wahrscheinlichkeit q (also unbegrenzt wachsendem Erwartungswert nq) folgenden Formel, die das grundlegende »e^{-x^2}-Gesetz« enthält. Die Poissonsche Formel wird angewendet, um z. B. auf physikalischem Gebiet Erscheinungen wie die Statistik der Brownschen Bewegung, der Szintillationen einer radioaktiven Strahlung, — Fälle, in denen man die Wahrscheinlichkeit q für das Auftreten »des Ereignisses« (der Szintillation z. B.) für sehr klein, die Anzahl der Teilchen n für sehr groß ansehen darf, — im obgenannten Sinne zu erklären.

Im Gedankenkreise des Laplaceschen Grenzüberganges wurden seitdem eine Reihe wichtiger Verallgemeinerungen vorgenommen, die schließlich zu einem außerordentlich allgemeinen und abgeschlossenen Gesetz — oft als »Fundamentalsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung« bezeichnet — führten, welches, auch unter Vermittlung der sogenannten Elementarfehler-Theorie, für die Anwendungsgebiete der Fehlertheorie und Statistik ausgenutzt wurde. Dem Poissonschen Grenzübergang aber wurde erst in neuerer Zeit, vornehmlich zufolge der Arbeiten von v. Bortkiewitsch, mehr Aufmerksamkeit zugewendet. Es wurde zunächst der Fall nicht konstanter Wahrscheinlichkeit $q_1, q_2, \ldots q_n$ behandelt, sodann — ähnlich wie dies für den Laplaceschen Grenzübergang untersucht worden war, nicht konstante und mehrwertige — statt wie bisher zweiwertige — Ausgangswahrscheinlichkeiten zugelassen und wieder ein Grenzübergang bei festem Erwartungswert durchgeführt. Dann ergibt sich aber, daß die »Wahrscheinlichkeit, die Summe x zu ziehen«, nicht mehr durch eine Formel ähnlich der Poissonschen (2) gegeben ist; — während es einen Teil der Bedeutung des »Fundamentalsatzes« ausmacht, daß dort auch bei sehr allgemeinen Annahmen das Resultat stets

die Form des e^{-x^2}-Gesetzes mit nur zwei Parametern behält; — doch lassen sich immerhin diese Ergebnisse verwenden, um recht allgemeine Statistiken, die den Typus seltener Ereignisse aufweisen, zu verstehen und zu interpretieren.

Aber in vielen Fällen wird die Lösung eines statistischen Problems im obigen Sinne, also die Zurückführung auf ein Kollektiv, mit den vorhandenen Mitteln überhaupt nicht gelingen, da die idealisierten Umstände, welche die verschiedenen Formeln voraussetzen, in der Wirklichkeit nur unvollkommen zutreffen. Dann wird man sich damit begnügen, Zahlen anzugeben. die in systematischer Weise die statistische Reihe als Ganzes, möglichst anschaulich und vollständig charakterisieren. Solche Zahlen sind z. B. die Anzahl N der Versuchsserien $N = S f(x)$; der Mittelwert $a = S x \frac{f(x)}{N}$, die Streuung $\sigma^2 = S (x-a)^2 \frac{f(x)}{N}$. (Unter S ist je nach den Angaben eine Summe oder ein Integral zu verstehen.) Mit der Bestimmung und dem Studium solcher Zahlen beschäftigt sich die sogenannte Kollektivmaßlehre, die in unserem Sinne einen Teil oder eine Vorstufe der Statistik bildet. — Es schien naheliegend, in Analogie zur Entwicklung einer »willkürlichen Funktion« etwa in eine Fourierreihe, die gegebenen statistischen »Kurven« $f(x)$ in geeignete Reihen zu entwickeln, und zwar sind zwei derartige Entwicklungen angegeben worden, die Brunssche Reihe zur Entwicklung stetiger Funktionen (geometrische Verteilungen) und eine zweite von Charlier zur Darstellung von Funktionen einer diskreten Variablen $x = 0, 1, 2, \ldots$ (arithmetische Verteilungen). Die erstgenannte schreitet bekanntlich nach Funktionen $q_i (i = 1, 2, \ldots)$ fort, die durch die sukzessiven Ableitungen der Gaußschen Funktion $q_0 = C \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ bestimmt sind. Diese q_i bilden ein vollständiges Orthogonalsystem und es läßt sich unter hinlänglich weiten Bedingungen ein Entwicklungssatz für beliebige stetige Funktionen $f(x)$ in eine »q-Reihe« $a_0 q_0 + a_1 q_1 + \ldots$ zeigen. In den Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ dieser q-Reihe besitzt man die gewünschten $f(x)$ charakterisierenden Zahlen.

Im Falle einer arithmetischen Verteilung $f(x)$ entwickelt man in eine Reihe, deren erstes Glied die Poissonsche Funktion $\psi_0 (x) = e^{-a} \cdot \frac{a^x}{x!}$ ist, und die nach sukzessiven Differenzen dieser Funktion fortschreitet:

$$\psi_1 (x) = -\Delta \psi_0 (x) = \psi_0 (x) - \psi_0 (x+1); \quad \psi_2 (x) = -\Delta \psi_1 (x) = \psi_1 (x) - \psi_1 (x+1); \ldots \quad (3).$$

Auch diese $\psi_i (i = 0, 1, 2, \ldots)$ genügen einer Orthogonalitätsbedingung — in der natürlich Σ statt $\int$ auftreten — und auch hier gilt für eine große Klasse von Funktionen $f(x)$ $(x = 0, 1, 2, \ldots)$ ein Entwicklungssatz in eine »ψ-Reihe«

$$f(x) = c_0 \psi_0 (x) + c_1 \psi_1 (x) + c_2 \psi_2 (x) + \ldots \quad (4).$$

Die Koeffizienten c_i sind dabei analog den Eulerschen Formeln für die Fourierkoeffizienten durch $f(x)$ bestimmt, und zwar ist der i^{te} Koeffizient c_i eine lineare Kombination der ersten i-Momente $m_i = \sum_x x^i f(x)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, c_0 ist gleich 1, wenn $f(x)$ eine Wahrscheinlichkeit ist, die ψ-Reihe beginnt mit $\psi_0 (x)$; c_1 verschwindet, wenn man in diesem Falle $\Sigma x f(x)$ mit dem Parameter a der Grundfunktion ψ_0 identifiziert; c_2 wird gleich $\frac{1}{2} \left(\sum_x x^2 f(x) - a^2 - a \right) = \frac{1}{2} (\sigma^2 - a)$, hängt also von der Dispersion ab und gibt die erste Abweichung der entwickelten Funktion von der Normkurve $\psi_0 (x)$ an, usw.; alle Koeffizienten zusammen bilden die Charakteristiken der Verteilung. Man kann hier also stets eine beliebige graphisch oder numerisch gegebene Reihe »statistisch analysieren«, d. h. aus ihr $(n+1)$ Koeffizienten $c_0, c_1 \ldots c_n$ bestimmen (es können zur Momentenbildung die durchgearbeiteten Methoden der Statik herangezogen werden) und daraus eine Vergleichskurve $c_0 \psi_0 + c_1 \psi_1 + \ldots + c_n \psi_n$ aufbauen.

Mit der Aufstellung einer solchen Vergleichskurve, wie sie die Brunsche Entwicklung für geometrische, die Charliersche für arithmetische Verteilungen liefert, ist natürlich noch kein statistisches Problem gelöst, so wenig wie durch die Bestimmung der Fourierkoeffizienten ein Problem der mathematischen Physik erledigt wird; aber hier wie dort ist dadurch eine willkürfreie Anweisung zur Aufstellung einer Interpolationsformel für den Erscheinungsablauf gegeben, einer Formel, die auch unter Umständen als Ausgangspunkt einer Lösung im eingangs präzisierten Sinne dienen kann. Ist dann anderseits in diesem Sinne eine Erklärung gelungen, so besteht auch kein Grund mehr, darüber hinaus noch nach einer andern »endgültigen« deterministisch-kausalen Begründung zu suchen. 845, 8

9. Das Zufallsgesetz des Sterbens.[1])

Von **E. J. GUMBEL** in Heidelberg.

Wir stellen uns die Aufgabe, den charakteristischen Verlauf der biometrischen Funktionen aus rein wahrscheinlichkeitstheoretischen Ueberlegungen abzuleiten. Unter biometrischen Funktionen versteht man vornehmlich folgende:

1. Die Zahlenreihe, welche angibt, wie viele von 100000 Neugeborenen den $x$ten Geburtstag erleben. Dividiert man diese Zahlen durch die Ausgangszahl 100000 und nimmt man an, daß x ein beliebiges Alter bedeutet, so erhält man eine stetige Funktion $l(x)$, welche den Bedingungen genügt: $l(x) \geqq 0$, $l'(x) \leqq 0$, und den Grenzbedingungen $l(o) = 1$ und $l(\omega) = 0$, wobei $\omega - 1$ das höchst erreichbare Alter.

2. Die Lebenserwartung eines $x$jährigen, $E(x)$, definiert durch

$$E(x) = \frac{1}{l(x)} \int_x^\omega l(z)\, dz\,,$$

wobei das Integral proportional der von den $x$jährigen verlebten Zeit.

3. Das mittlere Sterbealter der über $x$jährigen, welches sich ergibt als $x + E(x)$.

4. Die Sterbensintensität, definiert durch $\mu(x) = -\frac{d\,l(x)}{l(x)\,dx}$. Sie hängt mit der Lebenserwartung zusammen durch $\mu(x) = \frac{1 + E'(x)}{E(x)}$.

Man definiere eine stationäre Bevölkerung als eine geschlossene Bevölkerung mit konstanter Absterbeordnung, in der jährlich gleich viele geboren werden wie sterben. Hier bedeutet $\frac{l(x)}{E(o)}$ die relative Verteilung der Bevölkerung nach ihrem Alter, den sogen. Altersaufbau. Von diesem Standpunkt gesehen, ist die Grenzbedingung $l(o) = 1$ belanglos.

Die empirische Berechnung der biometrischen Funktionen geschieht durch Beobachtung der Wahrscheinlichkeit $q(x)$ eines $x$jährigen der lebenden Bevölkerung, innerhalb eines Jahres zu sterben. Denn sie ist

$$q(x) = \frac{l(x) - l(x+1)}{l(x)}\,.$$

Als erster hat Halley solche Sterbetafeln aufgestellt, und seit dieser Zeit datieren Versuche der Auffindung eines Gesetzes, das eine der biometrischen Funktionen und damit alle als Funktion des Alters wiedergibt. Ein solches vollständiges Naturgesetz ist unmöglich, da zu dem hier betrachteten Faktor des Alters spezielle Krankheiten und soziale Einflüsse hinzu kommen, deren Verlauf nicht naturgesetzlich bedingt ist. Der am häufigsten verwendete Ansatz rührt von Gompertz und Makeham her und geht von der Auffassung aus, daß die Sterbensintensität aus einem konstanten und einem exponentiell mit dem Alter wachsenden Faktor bestehe. Gauß hat eine ähnliche Formel aufgestellt. Von den zahlreichen anderen Versuchen heben wir nur Pearsons Auffassung, wonach $l(x)$ durch Komposition von vier Verteilungskurven, und die Lexissche Auffassung, wonach die Sterbefälle über dem 70. Jahr zufällig verteilt sind, hervor.

Unsere wahrscheinlichkeitstheoretische Ableitung geht von der ältesten Vorstellung über den Tod, die auch in den Religionen dominiert, aus. Danach sterben wir, weil das Schicksal ein schwarzes Los aus einer Urne gezogen hat. Um diese statistische Determination durchzuführen, betrachten wir die Häufigkeit der mittleren Sterbealter in einer stationären Bevölkerung. Der kleinste Wert ist das Sterbealter der über Nulljährigen, also das mittlere Alter der Gesamtbevölkerung beim Tod, $E(o)$. Seine Häufigkeit ist gleich eins, weil der gesamten Bevölkerung dieser Wert zukommt. Die Größe des mittleren Sterbealters steigt mit wachsendem Alter, seine Häufigkeit dagegen fällt mit wachsendem Alter, da es sich auf eine immer kleinere Bevölkerung bezieht. Sein größter Wert ist ω; da aber dieses Alter nicht mehr erreicht wird, ist seine Häufigkeit null. Außerhalb des im ersten Quadranten liegenden Bereichs vom Punkt 1, $E(o)$ bis zum Punkt 0, ω hat die Zuordnung keinen Sinn.

Da das mittlere Sterbealter für diejenigen gilt, die das $x$te Jahr erreichten, ist die Häufigkeit eines bestimmten mittleren Sterbealters gleich der relativen Anzahl derjenigen, die nach dem Alter x starben, also das Alter x erreichten, d. h. $l(x)$.

---

[1]) Näheres hierüber in einer gleichnamigen, demnächst in den Abhandlungen zur theoretischen Biologie (Verlag Gebr. Bornträger, Berlin) erscheinenden Broschüre.

Der entscheidende Schritt besteht nun in der Identifikation dieser Verteilung mit der Zufallskurve. Da negative Abweichungen vom Nullpunkt nicht auftreten können, hat nur der rechte Teil einen Sinn. Man kann diese Annahme auch dahin aussprechen: Die mittleren Alter beim Tod sind in einer stationären Bevölkerung zufällig verteilt.

Demnach setzen wir an

$$l(x) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x + E(x) - H)^2};$$

wobei σ und H zwei aus den Beobachtungen zu bestimmende Konstanten. Die Anfangsbedingung $l(o) = 1$ ist dabei nicht erhalten, wohl aber können wir durch entsprechende Wahl von H und σ dafür sorgen, daß die Lebenserwartung eines Neugeborenen und das mittlere Alter der Lebenden erhalten bleiben. H und σ haben die Dimension eines Alters oder einer Lebenserwartung. Differenziert man diese Integralgleichung und beachtet den Zusammenhang zwischen Sterbensintensität und Lebenserwartung, so erhält man

$$(1 + E'(x)\left(\frac{1}{E(x)} - \frac{1}{\sigma^2}(x + E(x) - H)\right) = 0\,.$$

Hier interessiert die zweite Klammer, welche gibt $E(x) = {}^1/_2\,(H - x + \sqrt{(H-x)^2 + 4\,\sigma^2})$.

Demnach ist $E(H) = \sigma$ und die Lebenserwartung eines Neugeborenen

$$E(o) = {}^1/_2\,(H + \sqrt{H^2 + 4\,\sigma^2})\,.$$

Die Lebenserwartung fällt stets mit dem Alter und nähert sich für $x \to \infty$ dem Wert null.

Setzt man diesen Wert der Lebenserwartung in die Integralgleichung ein, so wird

$$l(x) = e^{-\frac{1}{8\sigma^2}(x - H + \sqrt{(H-x)^2 + 4\sigma^2})^2},$$

wobei speziell

$$l(o) = e^{-\frac{1}{8\sigma^2}(-H + \sqrt{H^2 + 4\sigma^2})^2}.$$

Im Alter H wird $l(H) = e^{-1/2}$. Demnach ist H die logarithmische wahrscheinliche Lebensdauer. Um die Grenzbedingung $l(o) = 1$ zu verwirklichen, muß man annehmen, daß in der Umgebung des Alters null die Erlebenswahrscheinlichkeit momentan abnimmt, was kein allzu starker Widerspruch zur Erfahrung. Die Kurve der Erlebenswahrscheinlichkeiten verläuft zuerst nach unten konkav, hat einen Wendepunkt bei H und geht dann nach unten konvex. H kann also als normale Lebensdauer im Sinne von Lexis betrachtet werden. Eine bestimmte obere Grenze für das menschliche Leben gibt es nicht, jedoch müßte man eine ungeheure Zahl von Beobachtungen haben, um einen Menschen im Alter von 110 oder 120 Jahren erwarten zu können. Für große Alter schmiegt sich die Kurve sehr rasch der Abszisse an. Zur praktischen Berechnung setzt man $x = H + n\,\sigma$. Dann ist die Lebenserwartung nur mehr eine Funktion von σ und die Erlebenswahrscheinlichkeit kann numerisch angegeben werden. Eine Vergrößerung von H bedeutet eine Vergrößerung sämtlicher Erlebenswahrscheinlichkeiten, eine Vergrößerung von σ bei den Altern, die kleiner sind als die normale Lebensdauer, eine Verkleinerung, bei den größeren eine Vergrößerung von $l(x)$. Um die Formel für eine bestimmte Sterbetafel anzuwenden, wird man die beiden Konstanten H und σ durch die beiden ersten Momente, die verlebte Zeit und das mittlere Alter der Lebenden ausdrücken. Die so gewonnenen biometrischen Kurven schließen sich dem allgemeinen Verlauf der beobachteten gut an. Damit ist die Sterblichkeitsstatistik im Prinzip auf die Wahrscheinlichkeitstheorie zurückgeführt. 845, 9

10. Die Integrale der Differentialgleichungen als Funktion der auftretenden Parameter betrachtet und ihre Bedeutung für die Mechanik.

Von **KYRILLE POPOFF** in Sofia.

Die Zahl derjenigen Probleme, deren Differentialgleichungen sich durch Elementarfunktionen integrieren lassen, ist gering. Im allgemeinen ist man gezwungen, die Integration durch Reihen durchzuführen; diese Reihen sind verschiedener Art. In den meisten Fällen sind es Reihen, die nach Potenzen der unabhängigen Veränderlichen oder einer ihrer Funktionen fortschreiten; oft aber werden Reihen angewandt, die nach Potenzen eines Parameters, der in den Differentialgleichungen oder den Anfangsbedingungen auftritt, fortschreiten.

Die Reihen, die nach Potenzen des Parameters fortschreiten, werden gewöhnlich dann angewandt, wenn die Differentialgleichungen für einen speziellen Wert des Parameters

integriert werden können, denn in diesem Falle sind die Koeffizienten verschiedener Potenzen durch Integration linearer Differentialgleichungen zu ermitteln.

Ich möchte hier die Entwicklung nach den Potenzen der in den Differentialgleichungen auftretenden Parameter betrachten und ihre Bedeutung für die Mechanik besprechen.

Die Konvergenz der Entwicklungen nach den Potenzen der unabhängigen Veränderlichen oder nach den Potenzen auftretender Parameter ist durch die singulären Punkte des Integrals beschränkt. Dadurch entsteht die Frage nach dem Zusammenhang der Singularitäten, wenn man das Integral als Funktion der unabhängigen Veränderlichen oder als Funktion der auftretenden Parameter betrachtet.

Das Studium dieses Zusammenhanges ist von Poincaré aufgenommen und von Painlevé vertieft worden. Ich werde an einigen Beispielen die Bedeutung dieser Untersuchung für die Mechanik besprechen. Vorher möchte ich aber flüchtig die Hauptergebnisse der Untersuchung erwähnen.

Poincaré hat gezeigt, daß das Integral einer Differentialgleichung, deren rechte Seite in einem gegebenen Bereich eine holomorphe Funktion aller Veränderlichen und der auftretenden Parameter ist, eine holomorphe Funktion der unabhängigen Veränderlichen und des Parameters in einem geeignet gewählten Bereiche ist. Painlevé vertieft dieses Ergebnis und zeigt, daß — bei gewissen Voraussetzungen — den algebraischen singulären Punkten des Integrals, als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen betrachtet, auch algebraische singuläre Punkte entsprechen, wenn man das Integral als Funktion der Anfangsbedingungen auffaßt. Die Beweismethode von Painlevé kann leicht verallgemeinert werden und es gelingt, wie ich es in meinen letzten Pariser Vorlesungen ausführte, zu zeigen, daß bei gegebenen Voraussetzungen, den algebraischen Singularitäten des Integrals, als Funktion der unabhängigen Veränderlichen betrachtet, auch algebraische Singularitäten des Integrals, als Funktion der auftretenden Parameter aufgefaßt, entsprechen. Da die algebraischen Punkte nicht die konforme Abbildung verhindern, so erkennt man das große Interesse, das dieser Satz für die verschiedenen Anwendungen bieten kann, besonders in dem Falle, wo alle im Reellen auftretenden Singularitäten von algebraischem Charakter sind. Dann genügt es, die anderen Singularitäten einfach aus dem Bereiche auszuschalten, um durch eine geeignete konforme Abbildung Entwicklungen zu bekommen, die für alle in Betracht kommenden reellen Werte des Parameters gültig sind.

Ich möchte nun meine Gedanken durch drei klassische Beispiele illustrieren. Ich nehme dazu das ballistische Problem, das Problem von Zweikörpern (Planetenproblem) und das Dreikörperproblem.

1. Ballistisches Problem. In der klassischen Ballistik hat man nach der Zeit oder nach einer Funktion der Zeit entwickelt. In meinen Pariser und Berliner Vorlesungen[1]) habe ich die Vorteile des Verfahrens gezeigt, das Integral als Funktion des Abgangswinkels zu betrachten. In der Tat, wenn man die Bewegung des Geschosses auf Koordinatenachsen, die nach der Anfangsgeschwindigkeit und der nach unten gerichteten Vertikalen gerichtet sind, bezieht, dann haben die Differentialgleichungen die Form

$$\frac{dx'}{dt} = f_1(x', y', \sin^2 \varphi/2), \quad \frac{dy'}{dt} = f_2(x', y', \sin^2 \varphi/2), \quad \frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y'$$

mit den Anfangsbedingungen $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $x' = v_0$, $y' = 0$. Hier ist φ der Winkel zwischen den Koordinatenachsen.

Da während der Bewegung f_1 und f_2 holomorphe Funktionen der x', y' und $\sin^2 \varphi/2$ für alle reellen Werte von t aus dem beliebig großen Intervalle $(0, T)$ und für alle reellen Werte von φ zwischen 0^0 und $180^0 - \varepsilon$ sind, so sind, nach dem obigen Satze von Poincaré, x, y, x', y', für alle Werte von t aus dem Intervalle $(0, T)$, holomorphe Funktionen der $\sin^2 \varphi/2$ in einem Bereich, der den Abschnitt zwischen -1 und $+1$ der reellen Achse der »$\sin \varphi/2$-Ebene« enthält. Wenn man weiter diesen Bereich durch $\alpha = F(\sin \varphi/2)$ konform auf den Einheitskreis C abbildet, so daß $0 = F(0)$ ist, dann erscheinen x, y, x', y' als holomorphe Funktionen des Parameters α in dem Kreise C und können nach Potenzen von α entwickelt werden. Die so entstandenen Entwicklungen konvergieren für alle

[1]) K. Popoff, Les méthodes d'intégration de Poincaré et le problème général de la balistique extérieure, Paris. Gauthier-Villars et Cie, 1925. — Kyrille Popoff, Sur la convergence des séries de la balistique extérieure. C. R. du 26 Juillet 1926.

Werte von α, die allen reellen Werten von φ von 0^0 bis $180^0 - \varepsilon$ entsprechen. Die Berechnung der Koeffizienten dieser Entwicklung, die durch einfache Quadraturen geschieht, ist auf die von Siacci eingeführten Funktionen zurückzuführen.

2. Zweikörperproblem. Kommen wir jetzt zu dem Zweikörperproblem und betrachten wir die Reihen der elliptischen Bewegung, die nach den Potenzen der Exentrizität fortschreiten. Man weiß, nach Laplace, daß die Reihen für alle reellen Werte der mittleren Anomalie (M) nur dann konvergieren, wenn die Exentrizität (E) kleiner als 0,6627 . . . ausfällt. Diese Reihen, die eine große Rolle in der Störungstheorie der Planeten spielen, ergeben sich durch die Keplersche Gleichung

$$u - E \sin u = M.$$

Hr. Charlier hat, nach dem Studium der Differentialgleichung

$$\frac{d\,u}{d\,E} = \frac{\sin u}{1 - E \cos n},$$

den Holomorphiebereich dieser Reihen festgestellt. Die Kontur dieses Bereiches ist in bezug auf den Anfangspunkt symmetrisch, besitzt bei $E = -1$ und $E = +1$ je eine Spitze und schneidet die imaginäre Achse in den Punkten $+ 0{,}6627 \ldots$ und $- 0{,}6627 \ldots$.

Sei nun $e = \varphi(E)$ die Funktion, die die konforme Abbildung dieses Bereiches auf den Einheitskreis liefert, so daß $0 = \varphi(0)$ und $1 = \varphi(+1)$ ist. Dann werden die Reihen holomorphen Funktionen von e im Kreise darstellen. Also diese Reihen sind konvergent für alle Werte von e, die den reellen Werten von E zwischen 0 und $+1$ entsprechen. Die Koeffizienten dieser Entwicklungen ergeben sich leicht aus den Koeffizienten der Entwicklungen nach E.

3. Dreikörperproblem. Betrachten wir endlich das Dreikörperproblem. In der klassischen Himmelsmechanik wird nach den Potenzen der Störenden Masse entwickelt, dagegen in den neueren Arbeiten von Sundmann und Levi-Civita das Integral als Funktion der Zeit (t) betrachtet und nach den Potenzen von t entwickelt. In seinem Bericht für die Pariser Akademie hat sich Picard über die Arbeiten von Sundmann in der Weise geäußert:

»Es scheint, daß die allzugroße Allgemeinheit, in der die Analysis von Hrn. Sundmann gehalten ist, dem Studium der klassischen Fälle der Himmelsmechanik, wo immer eine gewisse Masse predominiert, wenig günstig ist. Es ist schwer, ohne ein tiefgehendes Studium sich Rechenschaft zu geben, was für eine Vereinfachung eine solche Hypothese in den Formeln des Helsingforser Astronomen ergeben würde; aber in jedem Falle scheinen seine Formeln nicht imstande zu sein, den periodischen Charakter von so vielen astronomischen Ereignissen in Evidenz zu setzen, was man so leicht mit den divergenten trigonometrischen Reihen erreichen kann. Was aber die Stabilitätsfrage betrifft, scheint es, daß noch wenig von diesen Reihen zu erwarten ist.«

Nun glaube ich, daß gerade bei diesen Fragen die große Bedeutung der Painlevéschen Studien des Integrals als Funktion der auftretenden Parameter zu erkennen ist. In diesem Falle ist störende Masse dieser Parameter. In der Tat hat Sundmann gezeigt, daß in dem allgemeinen Falle, die reellen singulären Punkte des Integrals, als Funktion der Zeit betrachtet, dem binären Zusammenstoß entsprechen und daß sie sämtlich algebraische kritische Punkte sind. Er hat noch gezeigt, daß man um die reelle Achse der »t-Ebene« ein unendliches Band von endlicher Breite bestimmen kann, das keinen anderen singulären Punkt enthält. Dieser Umstand gerade erlaubt Hrn. Sundmann die analytische Fortsetzung der Reihen nach dem Zusammenstoß zu liefern, da die algebraischen kritischen Punkte die konforme Abbildung prinzipiell nicht stören.

Kommen wir jetzt zu den klassischen Entwicklungen nach den Potenzen der störenden Masse. In meinen letzten Vorlesungen an der Sorbonne habe ich gezeigt, daß der verallgemeinerte Satz von Painlevé uns erlaubt festzustellen, daß den reellen kritischen Punkten des Integrals als Funktion der Zeit betrachtet auch kritische Punkte des Integrals, als Funktion der störenden Masse aufgefaßt, entsprechen, und folglich die Schwierigkeiten, die aus der physikalischen Natur des Problems entstehen, damit völlig erklärt sind. Es bleibt weiter die Singularitäten zu studieren, die durch die verschiedenen Transformationen entstehen. Wie das geschehen soll, habe ich schon an dem Zweikörperproblem bei den Entwicklungen nach den Potenzen der Exentrizität gezeigt.

11. Über eine mit dem Problem der Rakete zusammenhängende Aufgabe der Variationsrechnung.

Von **G. HAMEL** in Berlin.

Läßt man einen starren Körper von der augenblicklichen Masse M unter der Wirkung der Schwere, des Luftwiderstandes W und der Reaktionswirkung ausströmender Materie (also eine Rakete) in die Höhe steigen, so erhält man aus dem Newtonschen Grundgesetz der Mechanik und dem Gesetz der Massenerhaltung die Differentialgleichung

$$M\frac{du}{dt} + C\frac{dM}{dt} + W(s,u) + Mg = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Dabei ist s der Weg, t die Zeit, $u = \frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit, C die relative Ausströmgeschwindigkeit der Raketenfüllung.

Es sind folgende Vernachlässigungen gemacht: 1. In Anbetracht dessen, daß man nur Höhen von 100 bis 200 km erreichen will, ist g konstant genommen. 2. In W ist der Einfluß der ausströmenden Masse fortgelassen. 3. Die Aenderung des Impulses im Innern der Rakete durch Fortschreiten der Brennfläche (oder Aehnliches) ist als belanglos weggelassen. 4. Von der Erdrotation ist abgesehen.

M_e sei die Endmasse, M_a die Anfangsmasse. Gegeben seien: M_e, die gesamte Steighöhe h, ferner die Anfangsgeschwindigkeit u_a zur Zeit $t_a = 0$, $s_a = 0$, die konstante Ausströmgeschwindigkeit C. Gefragt ist nach dem Minimum von M_a, der Anfangsmasse.

Diese Aufgabe wurde von Goddard[1]) gestellt und zu lösen versucht, aber mit anfechtbaren mathematischen Hilfsmitteln. Sie soll hier mit den Mitteln der Variationsrechnung gelöst werden.

Aufgefaßt als lineare Differentialgleichung in M, läst sich Gl. (1) integrieren und nach Einsetzen der Endwerte nach M_a auflösen:

$$M_a = e^{-\frac{u_a}{C}} \int_0^{t_e} \frac{1}{C} W(s,u)\, e^{\frac{u}{C}+\frac{gt}{C}}\, dt + M_e\, e^{-\frac{u_a}{C}+\frac{u_e}{C}+\frac{gt_e}{C}}.$$

t_e, u_e, s_e sind die Endwerte, wo das freie Steigen einsetzt ($s_e \leqq h$). Ich beschränke mich auf das reine Raketenproblem und setze dementsprechend $u_a = 0$. Allerdings hat das zur Folge, daß ein eigentliches Extrem nicht existiert, sondern nur eine untere Grenze, der man aber beliebig nahe kommt, wenn man zu Anfang u recht schnell von null auf einen wohlbestimmten Wert anwachsen läßt. Wenn hinfort von Minimum die Rede ist, ist diese untere Grenze gemeint. Es ist ein wahres Minimum.

Es liegt also ein Problem folgender Art vor:

$$M_a = \int_0^{t_e} f(u,s,t)\, dt + F(u_e, t_e) = \text{Min.}$$

Dabei sind s_e, t_e frei $\left(u = \frac{ds}{dt}\right)$.

Dagegen besteht eine Gleichung zwischen u_e, s_e. Wenn das Pulver verschossen ist, d. h. $M = M_e$ geworden, wird die Rakete mit der noch vorhandenen kinetischen Energie weiter steigen. Dieses freie Steigen wird man ausnutzen. Bei diesem freien Steigen ist

$$M_e\frac{du}{dt} + W(s,u) + M_e g = 0,$$

was mit $f + \frac{dF}{dt} = 0$ identisch ist. Diese Gleichung hat die Form $u\frac{du}{ds} = f_1(u,s)$ und sei mit der Endbedingung $u = 0$ für $s = h$ zu

$$u = \psi(s)$$

integriert. Für große h ist sie, falls s auch groß ist, wegen des geringen W in großen Höhen nahezu mit

$$u = \sqrt{2g(h-s)}$$ identisch.

Es kommt also noch die Grenzbedingung $u_e = \psi(s_e)$ hinzu. Diese können wir ohne weiteres in F einsetzen, so daß das Zusatzglied die Form $F[\psi(s_e), t_e]$ bekommt. Wenn

[1]) A method of reaching extreme altitudes, Washington 1919, Smithsonian Institut.

wir aber das Minimum von M_a suchen, dürfen wir in dem Integral von der Grenzbedingung zunächst keinen Gebrauch machen, da man bekanntlich ein anderes u_e am Ende der Extremalen so zu $\psi(s_e)$ abbiegen kann, daß sich das Integral beliebig wenig ändert.

Bei fest gehaltenem s_e, t_e muß das Integral ein Minimum sein. Dies ist ein gewöhnliches Variationsproblem, liefert eine Eulersche Gleichung, reguläre Extremalen ohne konjugierten Punkt, auch ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} > 0,$$

wenn wir, was wohl zulässig ist, $W \geqq 0$, $\frac{\partial W}{\partial u} \geqq 0$, $\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} > 0$ annehmen und das Gleichheitszeichen nur für $u = 0$. Alle allgemeinen Ergebnisse folgen aus diesen Annahmen, zu denen noch $\frac{\partial W}{\partial s} < 0$ hinzutritt.

Also liefert das Integral für sich ein starkes Minimum. Die Schwierigkeiten beginnen erst, wenn wir s_e, t_e resp. s_e, u_e variieren. Es zeigt sich nun:

1. Es gibt einen einzigen stationären Endpunkt $s_e = s_0$, $u_e = u_0$, für den $\frac{\partial M_a}{\partial s_e} = 0$, $\frac{\partial M_a}{\partial t_e} = 0$ sind. Er liegt auf der Kurve $u = \psi(s)$, so daß diese Endbedingung eine natürliche ist im Sinne Courants.
2. Variiert man s_e, u_e auf der Kurve $u = \psi(s)$, so liegt im Punkte s_0, u_0 ein wirkliches Minimum vor.
3. Bei beliebiger Variation ist die Diskriminante der Glieder zweiter Ordnung, d. h. $\left[\frac{\partial^2 M}{\partial s_e^2}\frac{\partial^2 M}{\partial t_e^2} - \left(\frac{\partial^2 M}{\partial s_e \partial t_e}\right)^2\right]_0 = 0$, so daß möglicherweise spitzenförmige Gebiete an s_0, t_0 heranreichen, wo M_a kleinere Werte hat als in s_0, u_0.
4. Ein solches spitzenförmiges Gebiet kann aber nur von außen an die Kurve $u = \psi(s)$ heranreichen.

Diese Außenpunkte kommen aber als Endwerte s_e, u_e nicht in Frage, da sonst die Rakete überflüssige Geschwindigkeit am Ende durch plötzliche Aufnahme von Materie stoppen müßte, was physikalisch unmöglich ist. Mathematisch wird das Minimum durch die Ungleichheit $\frac{dM}{dt} \leqq 0$ garantiert. Es besteht also ein wirkliches Minimum.

Für die numerische Rechnung soll $W = C\delta_0 e^{-\frac{s}{l}} u^2$ zugrunde gelegt werden, mit $l = 6^2/_3$ km. Es zeigt sich, daß u_0 sehr wenig von C abhängt ($C = 1000$ und 2000 m/sec genommen), auch wenig von $C\delta_0$ und M_e, wenn man plausible Werte zuläßt. Es liegt u_0 sehr nahe bei 1000 bis 1100 m/sec, s_0 sehr nahe bei $^1/_2 h$ (alles gerechnet für $h = 100\,000$ m). Das Minimum selbst, ebenso der Wert $\lim u$ (für $t \to 0$) ist noch nicht berechnet. Bei den Rechnungen unterstützt mich freundlicherweise Herr Dipl.-Ing. Roßmann, Assistent von Geh.-Rat Cranz, der auch veranlaßt hat, daß über den Gegenstand in unserem Seminar für Mechanik an der Technischen Hochschule Charlottenburg vorgetragen wurde, wodurch ich auf das Problem aufmerksam wurde. Die nötigen Integrationen lassen sich überraschend leicht durchführen. 845, 11

12. Bestimmung der Stromverteilung in zylindrischen Leitern von allgemeiner Querschnittsform.

Von **F. NOETHER** in Breslau.

Während die Berechnung der Wechselstromverteilung in kreiszylindrischen Leitern eine bekannte einfache Aufgabe ist, wurde die entsprechende Berechnnng bei allgemeiner Querschnittsgestalt noch nicht in befriedigender Form durchgeführt. Praktisch kommen in der Elektrotechnik z. Z. rechteckförmige Querschnitte vor; auch der Fall des Kabels, wo mehrere kreisschnittige Leiter nahe beieinander liegen, gehört zu dieser Fragestellung.

Die Querschnittsebene des Leiters sei die x-y-Ebene, und die senkrecht dazu gerichtete Stromdichte sei mit $J(x\,y)$ bezeichnet. In der Querschnittsebene liegen dann die Komponenten der magnetischen Feldstärke: $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$. Wenn noch λ die Leitfähigkeit, μ die Per-

meabilität des Leitermaterials, und w die Kreisfrequenz des Stromes (d. h. Zeitfaktor $= e^{i\omega t}$) bedeuten, so nehmen die elektromagnetischen Feldgleichungen (ohne Verschiebungsstrom) die Form an:

$$\text{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} = 4\pi J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$\text{rot}\,\mathfrak{E} = \frac{1}{\lambda}\,\text{rot}\,J = -\mu\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\,,\ \text{d. h.}\ \frac{1}{\lambda}\frac{\partial J}{\partial y} = -i\omega\mu\mathfrak{H}_x;\quad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial J}{\partial x} = i\omega\mu\mathfrak{H}_y \quad . \quad (2).$$

Aus (1) und (2) erhält man durch Elimination von $\mathfrak{H}$ die folgende Gleichung, in der noch abkürzend $\alpha^2 = 4\pi\omega\lambda\mu$ gesetzt ist:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial y^2} = i\alpha^2 J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

und zwar für das Innengebiet des Leiterquerschnitts.

Im Falle des Kreisquerschnitts reicht diese Gleichung, in Verbindung mit der Annahme der Kreissymmetrie der Stromverteilung und der Vorgabe des Gesamtstromes, J^*, zur eindeutigen Bestimmung der Stromverteilung aus. Im allgemeinen Fall liegen aber, außer der Vorgabe von J^*, keine weiteren Randbedingungen vor, und dann läßt sich die Stromverteilung aus (3) allein noch nicht bestimmen. Die Lösung dieser Schwierigkeit besteht darin, daß das magnetische Feld $\mathfrak{H}$ auch im Außengebiet hinzugenommen und so bestimmt werden muß, daß es überall, auch an der Querschnittsbegrenzung, den magnetischen Stetigkeitsbedingungen entsprechend verläuft und im Unendlichen in der Ordnung $2J^*/r$ verschwindet. Wegen der überall gültigen Beziehung:

$$\frac{1}{\mu}\,\text{div}\,\mathfrak{B} = \text{div}\,\mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

kann im Innen- und Außengebiet gesetzt werden:

$$\mathfrak{H}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial y},\ \mathfrak{H}_y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

woraus durch Vergleich mit (2) hervorgeht, daß die »Flußfunktion« φ im Innern des Querschnitts bis auf eine additive Konstante mit $J/i\,\omega\lambda\,\mu$ übereinstimmt. Wir setzen also hier:

$$\varphi = \frac{1}{i\alpha^2}(4\pi J - C) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und erhalten damit für das Innere des Querschnitts aus (1) oder (3) die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 4\pi J = i\alpha^2\varphi + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

dagegen für das ganze Außengebiet, wo kein Strom vorhanden ist:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7'),$$

beide Gleichungen noch verknüpft durch die Stetigkeitsbedingungen, nach denen $\mathfrak{H}_{\text{tang.}}$ und $\mu \cdot \mathfrak{H}_{\text{norm.}}$ stetig in das Außenfeld übergehen, sowie Vorgabe des Gesamtstromes.

Die vollständige Durchführung der Aufgabe ist in zwei Fällen erleichtert, in denen die Rechnung im wesentlichen auf das Innengebiet beschränkt werden kann:

a) Im asymptotischen Falle großer α^2 konzentriert sich die Stromdichte und das Magnetfeld mehr und mehr auf die Leiteroberfläche und das Innere wird feldfrei. Daraus resultiert das Verschwinden der Komponente $\partial\varphi/\partial s$ am Rande des Querschnitts und folglich nach (6) Konstanz von J längs des Randes. Für diesen Fall reicht es also aus, die Gl. (3) mit der Randbedingung $J = \text{konst.}$ zu behandeln [1]).

b) Allgemein läßt sich die Aufgabe in die Gestalt einer über den Querschnitt erstreckten Integralgleichung schreiben. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf den Fall $\mu = 1$. Dann sind alle von φ geforderten Bedingungen erfüllt durch die Darstellung:

$$\varphi = -2\int_f J(\xi,\eta)\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,d\xi\,d\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

und man bekommt aus (6) die im Innern des Querschnitts gültige, symmetrische Integralgleichung:

$$4\pi J(x\,y) + 2\,i\,\alpha^2\int_f J(\xi\,\eta)\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,d\xi\,d\eta = C \quad . \quad . \quad (9),$$

[1]) Diese Formulierung hat M. J. O. Strutt irrtümlich auch der strengen Aufgabe gegeben: Ann. d. Phys. Bd. 83 (1927), S. 979.

wobei die Konstante C, die die Aufgabe zu einer inhomogenen macht, schließlich so zu bestimmen ist, daß der Gesamtstrom im Querschnitt $= J^*$ wird.

Diese Integralgleichung ist (wegen des imaginären Faktors vor dem Integral) immer lösbar; speziell ihre Neumannsche Entwicklung entspricht einer schrittweisen Berechnung der Stromverteilung, ausgehend von homogener Verteilung, bei kleinem α^2. Erwähnt sei noch, daß die beim Kreisquerschnitt übliche J-Darstellung als Quotient von zwei Besselschen Funktionen genau der Lösung von (9) durch den Quotienten von zwei Fredholmschen Reihen entspricht.

Eine genauere Durchführung dieser Ansätze ist an anderer Stelle beabsichtigt [1] [2].

845, 12

13. Problemstellung einer linearen darstellenden Geometrie.[3]

Von **F. REHBOCK** in Berlin.

Die klassische darstellende Geometrie läßt sich verallgemeinern durch die Begriffsbildung einer linearen darstellenden Geometrie des Strahlenraumes. Man geht aus von der Definition des linearen Risses, d. h. einer in bestimmtem Sinne linearen Abbildung, durch die jedem Element eines gegebenen Raumes wenigstens ein Element in einem festen Gebilde 2. Stufe — dem Bildgebiet — zugeordnet wird und bei der jedes Bildelement wenigstens ein nicht-singuläres — d. h. eindeutig abgebildetes — Original besitzt. Drei Problemgruppen charakterisieren dann das Wesen der darstellenden Geometrie. Die erste Frage ist die nach der konstruktiven Herstellung eines linearen Risses und nach der Verteilung der singulären Elemente. Da ein Riß noch kein umkehrbar eindeutiges Bild des Raumes darstellt, so ist zweitens zu untersuchen, wie sich durch Zusammensetzung mehrerer Risse ein ein-eindeutiges Abbild des zu untersuchenden Raumes verschaffen läßt. Will man dann schließlich den gegebenen Raum mit einem solchen »Rißsystem« beherrschen, d. h. etwa die projektiven Raumaufgaben allein innerhalb des Bildgebietes lösen, so müssen in diesem Bildgebiet gewisse feste »Fundamentalelemente« gewählt werden (bei 2 Zentralprojektionen z. B. der Hauptpunkt!), deren Aufsuchung als drittes Grundproblem zu bezeichnen ist.

Das erste — das Strukturproblem — ergibt für den dreidimensionalen projektiven Punkt- (oder Ebenen-)Raum die Existenz eines und nur eines singulären Elementes, und der allgemeinste lineare Riß entsteht hier durch kollineare Umformung einer »Zentralprojektion« bzw. eines »Spurenrisses«. Dagegen existiert im Strahlenraum als singuläres Gebilde eine Regelschar 2. Ordnung, und mit Hilfe der zu dieser Schar konjugierten Schar — der »projizierenden Strahlenschar« — läßt sich der allgemeinste Riß des Strahlenraumes in sehr einfacher Weise konstruieren. Durch projektive Spezialisierungen entstehen die elementaren Abbildungstypen (kinematische Abbildung, Zentralprojektion, Spurenabbildung).

Während zur Behandlung der Aufgaben des Punkt- (oder Ebenen-)Raumes zwei Risse ausreichend und nötig sind, ergeben zwei Risse des Strahlenraumes noch kein umkehrbar eindeutiges Bild, vielmehr gehören hier zu einem Bildpaar i. a. zwei Originale. Eineindeutigkeit läßt sich erzielen einmal durch Hinzunehmen eines 3. Risses, zweitens in geeigneten Fällen dadurch, daß man die Strahlen des Raumes und ihre Bilder orientiert, drittens aber durch Spezialisierung der gegenseitigen Lage der beiden projizierenden Scharen. Die klassischen Elementarmethoden benutzen den Spezialfall, bei dem die singulären Scharen einen und nur einen Strahl gemeinsam haben, der als Original jedes Bildpaares in Frage kommt, aber stillschweigend ausgeschieden wird.

Das »Fundamentalsystem«, das zur Lösung der projektiven Raumaufgaben mittels zweier Strahlenrisse nötig und ausreichend ist, besteht für den Fall, daß als Bildgebiet ein ebenes Feld gewählt wird, aus der Gesamtheit der Spurpunkte der beiden projizierenden

---

[1] Vergl. auch Handbuch d. Physik, Bd. XIII, S. 95 ff.

[2] Nachträglich wurde ich auf die Arbeit von H. Schwenkhagen: Stromverdrängung in rechteckigen Querschnitten, Archiv für Elektrotechnik XVII (1927), S. 537 aufmerksam. Diese Arbeit enthält zwar keine exakte Formulierung des Lösungsansatzes, führt aber in der Hauptsache ein richtiges Näherungsverfahren durch, das etwa darauf hinauskommt, unsere Integralgleichung (9) durch eine Summengleichung zu ersetzen; außerdem werden dort ausführliche Vergleichsmessungen beschrieben.

[3] Vergl. die Arbeiten des Verfassers in dieser Zeitschr. Bd. 6 (1926), S. 379 ff. und S. 449 ff.

Scharen (das sind i. a. 2 Kegelschnitte) und aus der »Fundamentalkorrelation« zwischen den Spurpunkten n und den Rissen $N' = N''$ der Koinzidenzstrahlen N, die ein Regelscharenbüschel erfüllen. Diese Fundamentalkorrelation gibt einem Bildsystem sein eigentliches Gepräge.

Dem allgemeinen Strahlenriß kommt eine gewisse Bedeutung bei Behandlung linien-geometrischer Aufgaben zu, weil bei ihm nur eine einparametrige singuläre Strahlenschar auftritt. Die Anzahl der singulären Strahlen, die in einer Strahlenmannigfaltigkeit des Raumes enthalten sind, charakterisiert nämlich die Art der Ausartung des zugeordneten Bildes. So wird bei einer Zentralprojektion ein Strahlenbündel deshalb durch ein Strahlenbüschel abgebildet, weil jedes Bündel einen singulären Strahl enthält, während bei der allgemeinen Abbildung die Strahlen des Bündels über das ganze Bildgebiet »auseinander geworfen« werden. 845, 13

14. Über homöoplanatische Abbildung in optischen Systemen.

Von **M. HERZBERGER** in Wetzlar.

Die geometrische Optik hat bisher, wenn man von den Fragestellungen absieht, die sich an die Sinusbedingung knüpfen, ihre Hauptaufgabe darin gesehen, die Gesetze zu studieren, die bei der Abbildung eines Flächenelements durch Bündel kleiner Apertur um die Achse in rotationssymmetrischen optischen Systemen entstehen.

Die Arbeit von Dr. Lihotzky und mir, über die ich hier berichte, geht von einer wesentlich anderen Fragestellung aus: Sie fragt, welcher Strahlenverlauf muß objekt- und bildseitig herrschen, damit eine endliche Fläche durch Bündel endlicher Apertur gleichmäßig gut abgebildet wird. Eine solche Abbildung wollen wir als homöoplanatische Abbildung bezeichnen. Wir werden sehen, daß die homöoplanatische Abbildung im wesentlichen die Form aller Kaustiken vorschreibt, wenn nur eine Kaustik bekannt ist. Degeneriert insbesondere die einem Objektpunkt entsprechende Kaustik in einen Punkt, so müssen alle Kaustiken in je einen Punkt degenerieren. Die so entstehende punktweise homozentrische Abbildung eines endlichen Flächenstücks auf ein endliches Flächenstück bezeichnen wir, dem schon eingebürgerten Brauch folgend, als aplanatische Abbildung.

Betrachten wir zuerst die Abbildung eines Flächenelements: Wir gehen aus von einem Achsenpunkt. Das abzubildende Flächenelement muß aus Symmetriegründen achsensenkrecht stehen, doch ist die Krümmung desselben beliebig wählbar. Hier ist die Bedingung für gleichmäßig gute Abbildung bekannt. Es ist die Staeble-Lihotzkysche Isoplanasiebedingung, die bei punktförmiger Abbildung des Achsenpunktes in die Abbesche Sinusbedingung übergeht. Die exakte geometrisch-optische Bedeutung der Isoplanasiebedingung ist folgende:

Dem Achsenpunkt entspricht bildseitig bei einem rotationssymmetrischen System immer eine rotationssymmetrische Kaustik. Die Erfüllung der Isoplanasiebedingung ist notwendig dafür, daß auch dem Nachbarpunkt eine rotationssymmetrische Kaustik entspricht. Ist sie erfüllt, so muß die Nachbarkaustik mit einer bestimmten konstruierbaren rotationssymmetrischen Kaustik bis auf Größen, die klein gegen den Abstand von der Ausgangskaustik sind, übereinstimmen.

Die Rotationsachsen der den verschiedenen Punkten des Flächenelements entsprechenden Kaustiken bilden ein rotationssymmetrisches Geradensystem, dessen Spitze auf der Achse liegt. Diese Spitze ist unter dem Namen isoplanatische Blende bekannt. Wir wollen sie korrekter den axialen Pupillenpunkt nennen. Entlang diesen Rotationsachsen, die wir als Nebenachsen bezeichnen wollen, ist naturgemäß unser System anastigmatisch, und diese anastigmatischen Bildpunkte der Punkte unseres Flächenelements, die gleichzeitig die Spitzen der verschiedenen Kaustiken bilden, liegen wieder auf einem rotationssymmetrischen Flächenelement, das wir als Element einer Kugel oder Ebene ansehen können[1]).

Eine andere Deutung der Isoplanasiebedingung, die sich rechnerisch ergibt, ist folgende:

Die vom Achsenpunkt ausgehende zweifach unendliche Strahlenmannigfaltigkeit zerfällt bildseitig in eine kontinuierliche Anzahl von Kegelmänteln, deren Spitze auf der Achse liegt. Jeder dieser Kegelmäntel vermittelt eine Abbildung des Objektflächenelements

[1]) Die Erfüllung der Isoplanasiebedingung allein für den Achsenpunkt gewährleistet noch nicht Verschwinden des Astigmatismus für den Nachbarpunkt. Ich verweise hierfür auf die unten zitierte Arbeit.

auf ein achsensenkrechtes Bildelement um die Spitze des Kegels. Man kann dieses Bild z. B. so annehmen, daß sein Krümmungsmittelpunkt mit dem Krümmungsmittelpunkt der von den kaustischen Spitzen gebildeten Fläche zusammenfällt. Die Vergrößerung des Objektelements erhält man aus energetischen Betrachtungen zu

$$\beta_u' = \frac{n \sin u}{n' \sin u'} \quad , \qquad (1).$$

Isoplanasie ist dann und nur dann vorhanden, wenn ein Punkt (der soeben als axialer Pupillenpunkt bzw. isoplanatische Blende bezeichnet wurde) existiert, derart, daß — von ihm aus betrachtet — alle Bilder gleich groß erscheinen. Sei k' seine Entfernung von der kaustischen Spitze, Δ' die sphärische Abweichung, so lautet die Bedingung

$$\frac{k' + \Delta'}{k'} = \frac{\beta_u'}{\beta_0'} \qquad (2) \qquad \text{oder} \qquad \frac{\Delta k'}{k'} = \frac{\Delta \beta'}{\beta'} \qquad (3)$$

oder

$$(k' + \Delta')\, n' \beta_0' \sin u' = k'\, n \sin u \qquad (4),$$

sie geht für $\Delta k' = 0$ in die Sinusbedingung

$$n' \beta_0' \sin u' = n \sin u \qquad (5)$$

über.

Wir wollen jetzt eine ähnliche Bedingung für die Abbildung eines außeraxialen Flächenelements aufstellen. Um die Verhältnisse denen der Achse anzugleichen, setzen wir voraus, daß die einem außeraxialen Punkt entsprechende Kaustik auch rotationssymmetrisch sei. Die Rotationsachse — der Hauptstrahl — ist dann der Strahl, der die kaustische Spitze enthält; er ist der einzige Strahl, längs dem ein vom Objektpunkt ausgehendes dünnes Bündel anastigmatisch ist.

Welches ist die Bedingung dafür, daß auch die Nachbarkaustiken rotationssymmetrisch sind? Die sagittalen Nachbarkaustiken, d. h. diejenigen, deren Objektpunkte den gleichen Abstand von der Achse haben, sind aus Symmetriegründen von selbst rotationssymmetrisch. Ihre Rotationsachsen bilden einen Kreiskegel, dessen Spitze, der sogenannte sagittale Pupillenpunkt, auf der Achse liegt. In den Schnittpunkten von Strahlenkegel und Hauptstrahl entstehen kleine Bilder des sagittalen Linienelements, die von selbst vom sagittalen Pupillenpunkt aus betrachtet gleich groß erscheinen. Die hier von selbst erfüllte Cosinusrelation lautet

$$\frac{n' \beta_{0s}' \cos \varepsilon_s'}{n \cos \varepsilon_s} = \frac{k_s' + \Delta k_s'}{k_s'} \qquad (6),$$

wo ε_s, ε_s' den Winkel des Strahls gegen die Sagittalrichtung, $k_s' + \Delta k_s'$ die Entfernung seines Schnittpunktes mit dem Hauptstrahl vom sagittalen Pupillenpunkt, k_s' die Entfernung der kaustischen Spitze bedeutet.

Sollen auch die Nachbarkaustiken in der Meridianebene rotationssymmetrisch bleiben, so gibt es auch einen meridionalen Pupillenpunkt, den Schnittpunkt der beiden Rotationsachsen; von ihm aus gesehen erscheinen wieder alle tangentialen Bilder, die man im Schnittpunkt von Strahlenkegel und Hauptstrahl sich denken kann, gleich groß und wir erhalten die Homöoplanasiebedingung in der Form

$$\frac{n' \beta_{0m}' (\cos \varepsilon_m' - \cos \varepsilon_{m0}')}{n (\cos \varepsilon_m - \cos \varepsilon_{m0})} = \frac{k_m' + \Delta}{k_m'} \qquad (7).$$

Hierbei bedeuten ε_m', ε_{m0}' die Winkel, die Strahl bzw. Hauptstrahl mit der Fortschreitungsrichtung der kaustischen Spitze bilden. Ist $\Delta' = 0$, d. h. ist die Bildkaustik ein Punkt, so würden aus (6) und (7)

$$n' \beta_{0s}' \cos \varepsilon_s' = n \cos \varepsilon_s \,, \qquad n' \beta_{0m}' (\cos \varepsilon_m' - \cos \varepsilon_{m0}') = n (\cos \varepsilon_m - \cos \varepsilon_{m0}) \qquad (8)$$

die beiden Cosinusrelationen, die für aplanatische Abbildung notwendig und hinreichend sind. Hier kann jeder Punkt als Blende angesehen werden.

Sind Kaustik und Nachbarkaustik rotationssymmetrisch, so können wir die Nachbarkaustik, die gegeben ist durch den Winkel $d\varepsilon_0$ der beiden Hauptstrahlen, folgendermaßen konstruieren. Wir tragen auf jedem Strahl in der Meridianebene vom Schnittpunkt mit der Hauptachse eine Strecke

$$x' = (k_m' + \Delta k_m') \frac{\sin (\varepsilon_m' - \varepsilon_{m0}')}{\cos \varepsilon_m' - \cos \varepsilon_{m0}'} \sin \varepsilon_m' \qquad (9)$$

ab. Um diesen Punkt drehen wir den Strahl in der Meridianebene um den Winkel $d\varepsilon$, der gegeben ist durch

$$\frac{d\varepsilon}{d\varepsilon_0} = \frac{\cos \varepsilon_m' - \cos \varepsilon_{m0}'}{\sin \varepsilon_{m0}' \sin (\varepsilon_m' - \varepsilon_{m0}')} \qquad (10).$$

Der so konstruierte Strahl berührt die Nachbarkaustik. Für die Isoplanasiebedingung wird $\varepsilon_{m0}' = 90^0$, $\varepsilon_m' = (90 - u)$, also aus (9) und (10)

$$x' = (k' + \Delta k') \sin \varepsilon_m' = (k' + \Delta') \cos u', \qquad d\varepsilon = d\varepsilon_0 \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Ist die Nachbarkaustik auch rotationssymmetrisch, so muß für sie auch die Ableitung der Homöoplanasiebedingung nach dm gelten. Bezüglich der Diskussion dieses neuen, seiner vielseitigen Verwendbarkeit wegen interessanten Satzes, in den auch die Krümmungen der Linienelemente eingehen, verweise ich auf die ausführliche Arbeit von Dr. Lihotzky und mir, die in der Zeitschr. f. Phys. erscheinen soll. Wir bezeichnen ihn als Zuordnungssatz.

Gilt der Zuordnungssatz nicht, so ist die soeben angeführte Konstruktion nicht exakt. Die Abweichung der wirklichen Kaustik gegen die so konstruierte ist aber auch dann klein gegen die Größe des Linienelements, längs dessen die kaustische Spitze verschoben wurde; (6) und (7) gewährleisten also jedenfalls gleichmäßige Abbildung eines Flächenelements.

Von besonderer Wichtigkeit ist, daß Gl. (10) integrierbar ist. Die Integration erlaubt uns, unter Voraussetzung homöoplanatischer Abbildung einer endlichen Fläche aus der axialen Kaustik bei willkürlicher Annahme der Pupillenkaustik (die Gesamtheit der sagittalen und tangentialen Pupillenpunkte) und der Fläche, auf der die kaustischen Spitzen liegen, jede andere Kaustik zu konstruieren. Die Integration gibt:

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Das Verfahren kann man so angeben: Gesucht sind die Strahlen durch einen beliebigen Punkt P. Man ziehe von P die Tangente an die Pupillenkaustik; das ist der Hauptstrahl. Er bildet mit der kaustischen Spitzenkurve den Winkel ε_0. Dann konstruiere man die Fläche durch P, die die Gesamtheit aller Hauptstrahlen unter gleichem Winkel schneidet wie die Fläche der kaustischen Spitzen. Sie trifft die Achse in P_0. Bilden die in P_0 mündenden Strahlen der axialen Kaustik mit der Achse einen Winkel α_0, so geht durch P ein Strahlenkegel, der mit der Nebenachse einen Winkel α bildet, der durch (12) gegeben ist. 845, 14

HAUPTAUFSÄTZE

Zur statischen Berechnung der Achsenregler.

Von **K. KÖRNER** in Prag.

Es ist bekannt, daß die Achsenregler vor den Pendelreglern den Vorzug haben, daß alle ihre Drehzapfen der Antriebswelle parallel liegen, so daß bei Aenderungen der Drehgeschwindigkeit durch die Massendrücke der Pendel kein Ecken in den Lagern entsteht und daß die Pendel auch unmittelbar und in einfacher Weise als Beharrungsmasse mitwirken können. Hingegen gestaltet sich die statische Berechnung und insbesondere der Ueberblick über die zu wählenden Größenverhältnisse etwas verwickelter, als bei Pendelreglern. Für die zeichnerische Darstellung der auf die Pendel wirkenden Kräfte und Momente sind verschiedene Vorschläge gemacht worden[1]), die sich aber eigentlich nur auf die Fliehkräfte beziehen, die Federkräfte aber nicht in gleich einfacher Weise erledigen. Es soll daher vorerst eine Form mitgeteilt werden, die dies erfüllt, allerdings vorläufig bei Vernachlässigung der auf die Federn selbst wirkenden Fliehkraft, die ja auch die Richtung der Federkraft am Pendel etwas verschiebt[2]), und der Fliehkraft der Zugstange zwischen Pendel und Steuerschaltorgan; diese zusätzlichen Einflüsse sind nachträglich gesondert hinzuzufügen, sie würden bei sofortiger Einbeziehung den Ueberblick erschweren.

Unter diesen Voraussetzungen und bei den in Abb. 1 angegebenen Bezeichnungen ist das Moment der hier im Gegensatz zu vielen Pendelreglern im Schwerpunkt S des Pendels angreifenden Fliehkraft:

$$\mathfrak{M} = M r \omega^2 h_1,$$

[1]) Vergl. z. B. Tolle, Die Regelung der Kraftmaschinen, 3. Aufl., Berlin, Julius Springer, S. 676.

[2]) Stodola, Z. d. V. d. Ing. 1899, S. 675. — Lüttmann, Z. d. V. d. Ing. 1907, S. 1788. — Zvoníček, Z. d. V. d. Ing. 1908, S. 303. — Tolle, a. a. O., S. 519 und Z. d. V. d. Ing. 1897, S. 857 und 1908, S. 303. — Röver, Z. d. V. d. Ing. 1909, S. 1272.

worin M die Pendelmasse und ω die Drehgeschwindigkeit der Reglerwelle bedeuten. Aus dem Dreieck OAS ist ersichtlich, daß $rh_1 = ax_1 = as \sin\alpha$, und daher:

$$\mathfrak{M}_0 = Mas\omega^2 \sin\alpha.$$

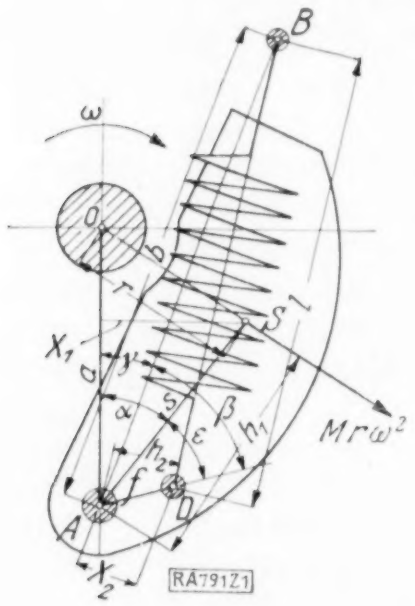


Abb. 1.

Für gleichbleibende Drehgeschwindigkeit ω ist daher die Momentenlinie für die Abszisse α eine einfache Sinuslinie. Die Arbeit der Fliehkraft beim Pendelausschlag $d\alpha$ ist:

$$dA = \mathfrak{M}_0 d\alpha = Mas\omega^2 \sin\alpha d\alpha,$$

die Momentenlinie entspricht also vollständig der gebräuchlichen Fliehkraftslinie bei Pendelreglern, die über den Entfernungen des Fliehkraftsangriffspunktes von der Reglerspindel aufgetragen wird.

Nimmt man nun nach unserer Voraussetzung die Federkraft F in der Verbindungsgeraden zwischen ihren Aufhängepunkten an, so ist ihr Moment auf das Pendel: $\mathfrak{M} = F \cdot h_2$, und da im Dreieck ABD wieder $lh_2 = bx_2 = bf \sin\beta$ ist, so wird:

$$\mathfrak{M} = F \cdot \frac{bf}{l} \sin\beta.$$

Hierin ist $F = k(l - l_0)$ zu setzen, wenn l_0 die Länge zwischen den genannten Anhängepunkten bei ungespannter Feder bedeutet, während k die für die Verlängerung 1 der Feder nötige Kraft ausdrückt.

Aus der Abbildung ergibt sich ferner, daß $\beta = \alpha - \gamma + \varepsilon$ oder mit $\varepsilon - \gamma = \vartheta$ $\beta = \alpha + \vartheta$ ist, also:

$$\mathfrak{M} = k(l - l_0)\frac{bf}{l} \sin(\alpha + \vartheta) = kbf\left(1 - \frac{l_0}{l}\right) \sin(\alpha + \vartheta).$$

Es kommt also, wie man ja auch unmittelbar erkennt, nur auf den Winkel $\vartheta = \varepsilon - \gamma$, nicht aber auf die Winkel γ und ε selbst an, die Werte von l_0, k, b, f, ϑ sind hier gleichbleibend, während $l = \sqrt{b^2 + f^2 - 2bf\cos\beta}$ mit α veränderlich ist. Zieht man durch den Endpunkt von l_0 eine Parallele zu AB, so erhält man auf AD den Abschnitt f_0, und es wird damit: $\mathfrak{M} = k(f - f_0)b \sin(\alpha + \vartheta)$, eine Größe, die leicht zeichnerisch dargestellt werden kann. Man trage auf der Abszissenachse $f = AD$ (Abb. 2) auf und schlage von

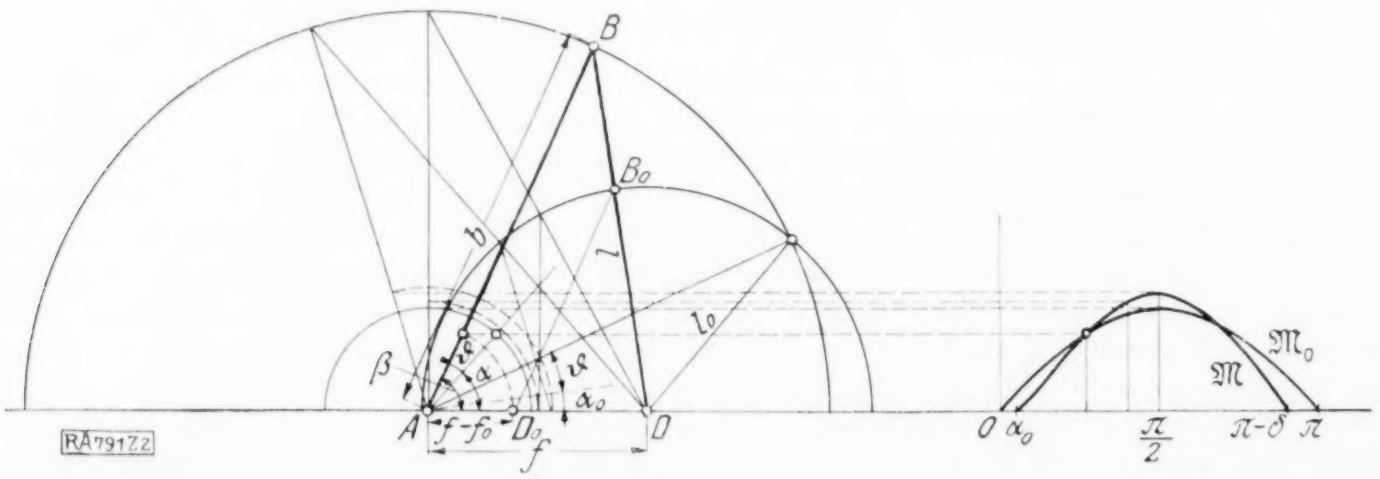


Abb. 2.

den Endpunkten dieser Strecke je einen Kreis mit b und l_0 als Halbmesser. Ein Radius b im Winkel $\beta = \alpha + \vartheta$ gegen f hat den Endpunkt B, der, mit D verbunden, den l_0-Kreis um D in B_0 schneidet. Zieht man endlich $B_0D_0 \parallel AB$, so ergibt sich $AD_0 = f - f_0$ und der mit diesem Halbmesser zu schlagende Kreis um A, der im Schnitt mit AB die Ordinate $(f - f_0)\sin\beta$ bestimmt. Für den betrachteten Punkt soll $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0$ sein, die gleiche Höhe soll also auch in dem betreffenden Maßstab den Wert $Mas\omega^2 \sin\alpha$ haben; der Winkel $\alpha = \beta - \vartheta$ ergibt daher den passenden Halbmesser und damit für verschiedene Winkel α die Momentenlinie $\mathfrak{M}_0$ bei gleichbleibendem ω. Nun findet man auch für jedes $\beta = \alpha + \vartheta$ den Wert $\mathfrak{M}$, dessen Verlauf wegen der statischen Stabilität in den verwendbaren Grenzen überall steiler liegen muß, als der von $\mathfrak{M}_0$. Um die Strecken für $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_0$ in angemessener Größe zu erhalten, ohne b und l_0 gar zu groß annehmen zu müssen, dient die Hilfskonstruktion in Abb. 3.

Das zum Gleichgewicht erforderliche Fliehkraftsmoment $\mathfrak{M}$ wird für $\alpha = \pi - \vartheta$ gleich 0, sein Größtwert liegt bei $\frac{\sin^2\beta}{\cos\beta} = -l^3 \frac{1-\frac{l_0}{l}}{l_0 b f}$, einem negativen Wert, demnach ist hierfür $\beta > \frac{\pi}{2}$. Aus dem Verlauf der Linien für $\mathfrak{M}$ in Abb. 2 und 3 erkennt man, daß die Stabilität bei wachsendem und unter Umständen auch bei sinkendem α im ersten Quadranten dieses Winkels, der ja allein in Betracht kommt, abnimmt, α muß also zwischen entsprechenden Grenzen liegen.

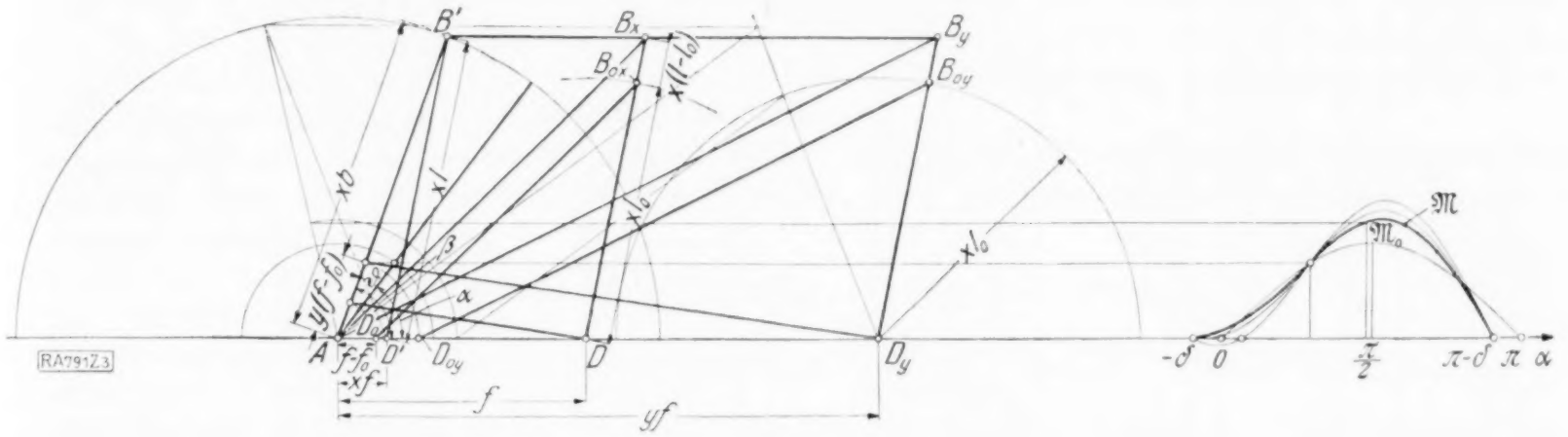


Abb. 3.

Ein wesentlich besserer Ueberblick wird durch Berechnung und Verzeichnung der örtlichen Stabilität (auch Stabilitätsgefälle genannt)[1]) erlangt. Bei jedem Ausschlagwinkel des Pendels, wenn jeweils $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0$ oder $Mas\omega^2 \sin\alpha = kbf\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)\sin(\alpha+\vartheta)$ ist, muß zur Erreichung der Stabilität der Wert $\delta = \frac{d(\mathfrak{M}-\mathfrak{M}_0)}{\mathfrak{M}\,d\alpha}$ positiv sein und eine gewisse Größe aufweisen. Hieraus ergibt sich mit $l = \sqrt{b^2+f^2-2bf\cos\beta}$ nach einfacher Rechnung:

$$\delta = \cot(\alpha+\vartheta) - \cot\alpha + \frac{fb}{\left(\frac{l}{l_0}-1\right)l^2}\sin(\alpha+\vartheta) = \frac{f\cdot b\sin(\alpha+\vartheta)}{\left(\frac{l}{l_0}-1\right)l^2} - \frac{\sin\vartheta}{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\vartheta)}.$$

Setzt man hierin: $\varphi = \frac{f}{b}$ und $\lambda_0 = \frac{l_0}{b}$, so ergibt sich:

$$\delta = \frac{\varphi\sin(\alpha+\vartheta)}{\left(\frac{1}{\lambda_0}\sqrt{1+\varphi^2-2\varphi\cos(\alpha+\vartheta)}-1\right)[1+\varphi^2-2\varphi\cos(\alpha+\vartheta)]} - \frac{\sin\vartheta}{\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\vartheta)} = A - B > 0.$$

Der erste Summand A ist bei gegebenem φ und λ_0 nur mehr von $\beta = \alpha+\vartheta$ abhängig, während der zweite B von α und ϑ bestimmt wird, aber von φ und λ_0 unabhängig ist. Man kann demnach für gegebene Werte von λ_0 für A eine Linienschar in β mit dem Parameter φ verzeichnen. Ihr Verlauf läßt sich zeichnerisch ermitteln, da $f\cdot b\cdot\sin\beta = l\,h_2$ (Abb. 1) ist, also

$$A = \frac{h_2 l_0}{(l-l_0)\,l}.$$

Die Konstruktion ist in Abb. 4 dargestellt und mit den dort eingetragenen Bezeichnungen leicht verständlich.

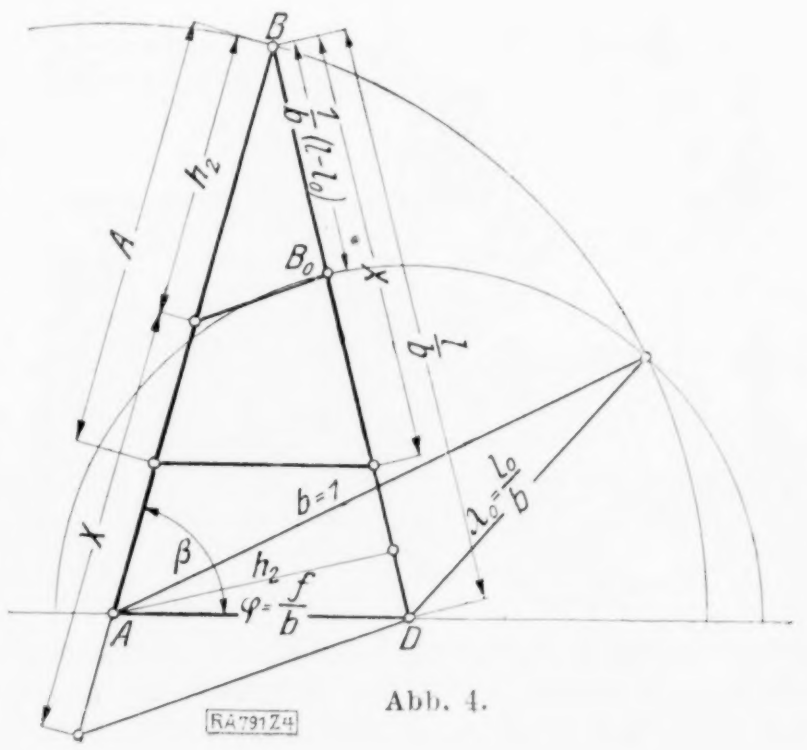


Abb. 4.

[1]) Tolle, a. a. O., S. 410, vergl. auch A. Pröll, Dinglers polyt. Journ. 1911, S. 52, und R. Pröll, Z. d. V. d. Ing. 1913, S. 1292.

Beim zweiten Glied erhält man je nach der Abhängigkeit von α bei gleichbleibendem ϑ einmal: $B_\vartheta = \frac{\sin \vartheta}{\sin(\beta - \vartheta) \sin \beta}$ und der Abhängigkeit von ϑ bei gleichbleibendem α: $B_\alpha = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}$, also zwei verschiedene Linienscharen über der Abszisse β mit den betreffenden Werten von ϑ oder α als Parameter.

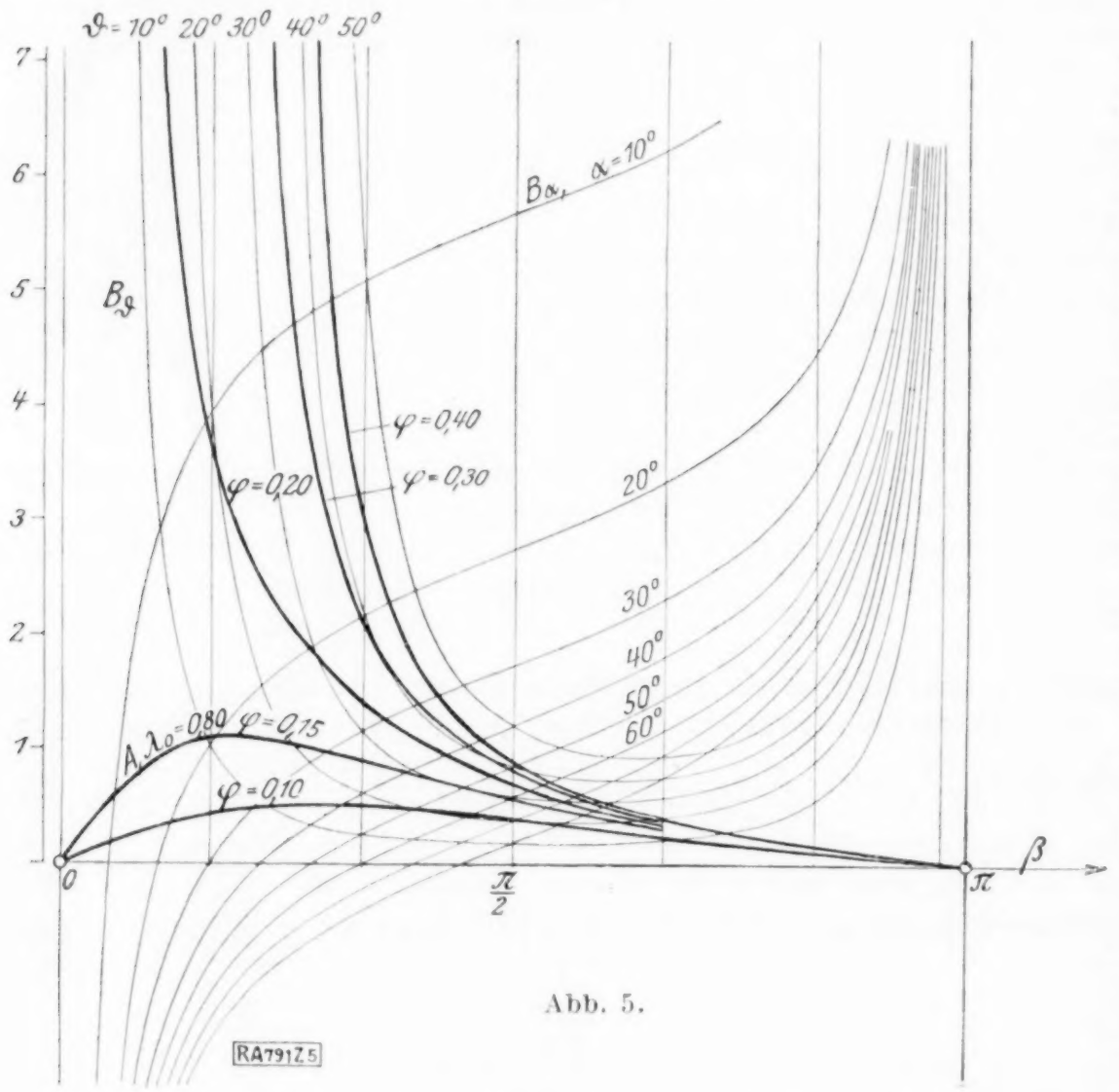


Abb. 5.

Verzeichnet man diese zwei Linienscharen für B_ϑ und B_α mit Bezeichnung ihrer Parameter in einer gemeinsamen Abbildung 5, legt man sodann eine Schar A mit gegebenem Wert λ_0 und ebenfalls bezeichneten Parametern φ (z. B. auf durchsichtigem Papier gezeichnet) so darauf, daß die Achsen zusammenfallen, so ersieht man für einen gegebenen Fall daraus alles Erforderliche. Hat man z. B. in Abb. 5 die A-Linien für $\lambda_0 = 0{,}8$ eingetragen und z. B. φ, α und δ gewählt, so ergibt sich sogleich der zugehörige Wert von ϑ in demjenigen Punkt der Linie B_ϑ, der um δ unter dem auf gleicher Ordinate liegenden Punkt von A für das gegebene φ liegt. Man erkennt dann sowohl die Aenderung der Astasie δ beim Pendelausschlag, als auch bei etwaiger Aenderung von ϑ oder φ. Für andere Werte von λ_0 erhält man natürlich andere Linienscharen A, z. B. nach Abb. 6 für $\lambda_0 = 0{,}6$, und es ist erwünscht, daß sie in dem betreffendem Gebiet möglichst derart verlaufen, daß δ sich nicht allzu sehr ändert.

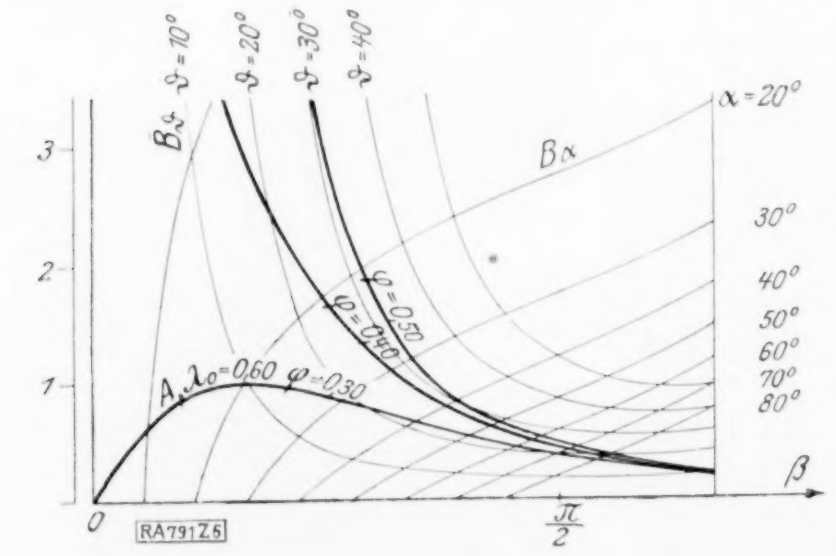


Abb. 6.

Nachdem die Lage der wesentlichen Punkte und auch die Pendelgewichte nicht genau eingehalten werden können und auch noch die Fliehkraft der Federn selbst auf Größe und Richtung ihrer Zugkraft an den Pendeln einwirkt, da endlich der Einfluß der Zugstangen zum Schaltorgan in bekannter Weise noch nachträglich berücksichtigt werden muß, so ist es erwünscht, beim fertigen Regler die Drehzahl etwas ändern zu können. Um so mehr ist dies in Betrieben mit veränderlicher Arbeitsgeschwindigkeit der Fall, wo oft auch während des Ganges weitgehende Drehzahländerungen erforderlich sind. Im ersten Fall genügt gewöhnlich das Anspannen der Federn durch eine am Pendelzapfen D (Abb. 1) angebrachte Schraube. Dabei bleibt die gegenseitige Lage aller wesentlichen Punkte die gleiche, es sind also a, b, s, f, α, β gleichbleibend, nur l_0 wird verändert. Aus der Form des Aus-

druckes $\delta = \dfrac{fb \sin\beta}{\left(\dfrac{l}{l_0} - 1\right) l^2} - \dfrac{\sin\vartheta}{\sin\alpha \sin\beta}$ ersieht man sogleich, daß sich beim Spannen der Feder für die Einstellung höherer Drehzahl der Wert von δ vermindert, der Regler also leicht labil werden kann. Bei der Verkleinerung von l_0 wird nämlich das erste Glied kleiner, während das zweite negative unverändert bleibt.

Spannt man hingegen die Feder durch Vergrößerung von l, indem man den Anhängepunkt B (Abb. 1) von D entfernt, so ändert sich bei gleichbleibender Lage des Pendels und Schaltorgans sowohl b als auch ϑ je nach der Richtung der Verschiebung, während l_0 gleich bleibt. λ_0 und φ vermindern sich mit wachsendem b; bei gleichbleibendem ϑ wird der Regler labiler; verkleinert man jedoch auch ϑ, indem man die Richtung AB gegen AS hin verschiebt, so läßt sich dies teilweise aufheben. Solche Ausführungen bestehen bereits in größerer Zahl.

Man kann in beiden genannten Fällen für großen Verstellbereich der Drehzahlen dadurch etwa gleichbleibende Astasie erzielen, daß man neben l_0 oder b und ϑ auch f ändert, derart, daß $A = \dfrac{\varphi \sin\beta}{\left(\dfrac{1}{\lambda_0}\sqrt{1+\varphi^2-2\varphi\cos\beta} - 1\right)(1+\varphi^2-2\varphi\cos\beta)}$ im ersten Fall gleich bleibt, im zweiten sich ebenso stark wie $B = \dfrac{\sin\vartheta}{\sin\alpha\sin\beta}$ ändert. Dieser Gedanke ist in den neueren Bauarten von R. Pröll[1]) verwirklicht worden, indem die Verschiebung des Aufhängepunktes B der einen Feder sich durch einen Winkelhebel gleichzeitig auf den Aufhängepunkt D der zweiten Feder überträgt. Dabei bleibt λ_0 gleich, es ändern sich jedoch φ, β und ϑ.

Für den Fall, daß nur φ und λ_0 verändert werden sollen, also B gleich bleibt, ergibt sich der Zusammenhang zwischen diesen Größen bei gegebenem Wert von A durch: $\lambda_0 = \dfrac{A(1+\varphi^2-2\varphi\cos\beta)^{3/2}}{\varphi\sin\beta + A(1+\varphi^2-2\varphi\cos\beta)}$; man kann ihn in dem fraglichen Gebiet genau genug durch eine Gerade ersetzen, für die

$$\frac{d\lambda_0}{d\alpha} = A\,\frac{(1+\varphi^2-2\varphi\cos\beta)\,[A(\varphi-\cos\beta)-\sin\beta] + 3(\varphi-\cos\beta)\varphi\sin\beta}{[\varphi\sin\beta + A(1+\varphi^2-2\varphi\cos\beta)]^2}\sqrt{1+\varphi^2-2\varphi\cos\beta}$$

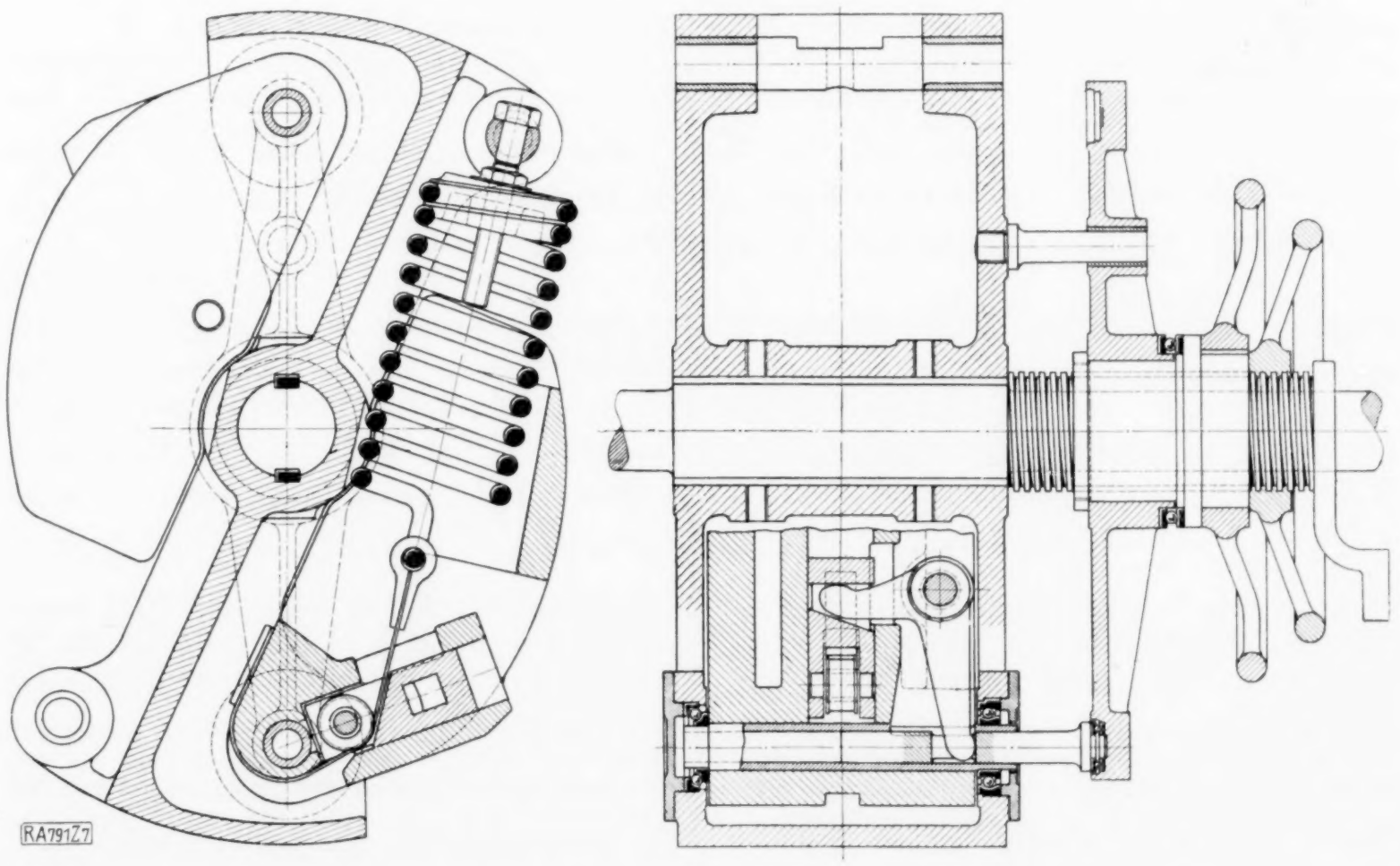


Abb. 7.

[1]) Tolle, a. a. O. S. 716.

ist. Beim Entwurf Abb. 7 ist: $\lambda_0 + \varphi = 0{,}95$, also $\frac{d\lambda_0}{d\varphi} = -1$, wofür der Verlauf der Werte von A in Abb. 8 für verschiedene Fälle verzeichnet wurde. Man sieht, daß in einem gewissen Bereich von β sich die Stabilität kaum ändert, auch wenn die Drehzahl stark wechselt. Die Aufhängung der Federn an den Pendeln erfolgt mit einem über eine Rolle geführten Banddrahtseil.

Bei mäßigen Aenderungen der Drehzahl kann man alle einflußnehmenden Strecken und Winkel gleich lassen und nur s durch Verschieben eines Gewichts im Pendel ändern. Da diese Größe in δ nicht vorkommt, bleibt die örtliche Ungleichförmigkeit unberührt, während die Drehzahl im Verhältnis $\sqrt{s}$ veränderlich ist[1]).

Man kann natürlich aus der Gleichung für δ für einen gegebenen Wert desselben die Größen l_0 und k analytisch bestimmen. Es wird:

$$l_0 = \frac{l}{1 + \frac{fb}{l^2} \cdot \frac{\sin\beta}{\delta + \frac{\sin\vartheta}{\sin\alpha\,\sin\beta}}}$$

und aus: $M a s \omega^2 \sin\alpha = k b f \left(1 - \frac{l_0}{l}\right)$ für den betrachteten Punkt:

$$k = \frac{M a s \omega^2 \sin\alpha}{f b \sin\beta}\left[1 + \left(\delta + \frac{\sin\vartheta}{\sin\alpha\,\sin\beta}\right)\frac{l^2}{f b \sin\beta}\right].$$

Endlich möge mit Rücksicht auf eine in der Literatur vorkommende Bemerkung[2]) noch der Fall besprochen werden, daß die Pendel selbst als Beharrungsmasse mitwirken sollen.

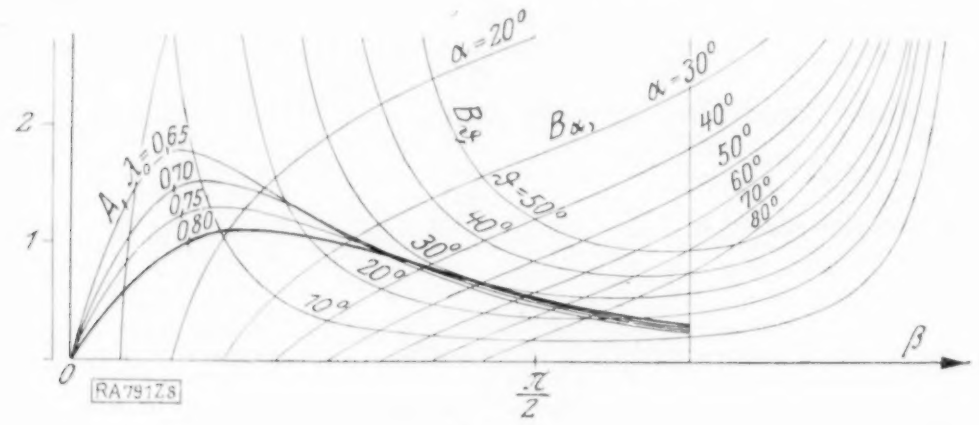


Abb. 8.

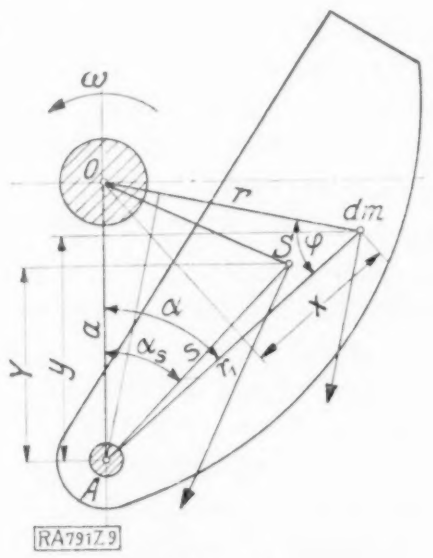


Abb. 9.

Jedes Massenteilchen dm ergibt nach Abb. 9 ein Pendeldrehmoment

$$d\mathfrak{M}_b = dm \cdot r \cdot r_1 \cos\varphi \frac{d\omega}{dt} = dm \cdot r_1 x \frac{d\omega}{dt},$$

wenn $\frac{d\omega}{dt}$ die augenblickliche Drehbeschleunigung der Antriebswelle ist. Da $x = r_1 - a\cos\alpha$, wird:

$$\mathfrak{M}_b = \frac{d\omega}{dt}\int^{M} r_1 (r_1 - a\cos\alpha)\, dm = \frac{d\omega}{dt}\,(J_1 - a\int^{M} y\, dm)$$

mit $y = r_1\cos\alpha$ und J_1 als Trägheitsmoment des Pendels für die Achse A Ist endlich $Y = s\cos\alpha_s$ die Projektion der Schwerpunktsentfernung AS auf OA, so wird:

$$\mathfrak{M}_b = \frac{d\omega}{dt}\,(J_1 - aMY) = \frac{d\omega}{dt}\,[J + Ms(s - a\cos\alpha_s)],$$

worin J das Trägheitsmoment des Pendels für den Schwerpunkt S bedeutet. Das letzte Glied ist ebenso gebildet, wie früher $r_1(r_1 - a\cos\alpha)$, man hat also die ganze Masse M im Schwerpunkt vereint anzunehmen und ihr Massenmoment zu bilden, das zum Wert $J\frac{d\omega}{dt}$ anzufügen ist. Das Pendel wird demnach als Beharrungsmasse besonders wirksam, wenn $\frac{J\,d\omega}{dt}$ und $Ms(s - a\cos\alpha_s)\frac{d\omega}{dt}$ im selben und günstigen Sinne wirken, also das Pendel seinem Drehpunkt voraus läuft und die Normale durch den Schwerpunkt S auf OS außen an A vorbeigeht.

791

[1]) D. R. P. 108424.

[2]) Tolle, a. a. O., S. 677, vergl. v. Mises, Dynamische Probleme der Maschinenlehre, B. G. Teubner, S. 273, Stodola, Z. d. V. d. Ing. 1899, S. 509.

Ein Beitrag zur Bestimmung der Deformationen einer elastischen Membran unter dem Einfluß gegebener äußerer Kräfte.

Von **FRANK LÖBELL** in Cannstatt a. N.

Die nachfolgenden Ausführungen sind angeregt durch die in dieser Zeitschrift, Bd IV (1924), S. 377 ff. erschienene Abhandlung von Lagally über Spannung und elastische Deformation von unebenen Membranen. Lagally geht davon aus, daß unter der Voraussetzung des Fehlens äußerer Kräfte jedes in der Membran mögliche System von Spannungen einen Kräfteplan besitzt, und daß die Gesamtheit dieser Kräftepläne mit der der Drehrisse der Membranfläche identisch ist; auf Grund dieses Gedankens wird von ihm die Bestimmung aller möglichen Spannungszustände auf dieselbe Differentialgleichung zurückgeführt, aus deren Lösung Weingarten die infinitesimalen Verbiegungen einer Fläche ableitete. Die Berechnung der Deformation der Membran aus den nach dem Hookeschen Gesetz durch die Spannungen bestimmten Verzerrungen geschieht durch Vermittlung einer Differentialgleichung, die sich von Weingartens »charakteristicher Gleichung« nur durch ein die Homogenität aufhebendes Glied unterscheidet.

Im folgenden handelt es sich teilweise um eine Wiedergabe des Inhaltes bekannter Gedankengänge in neuer Form; diese Wiederholung war unvermeidlich, da gerade gezeigt werden sollte, wie durch vermehrte Verwendung der Vektorschreibweise nicht nur die Darstellung vereinfacht, sondern namentlich die Einsicht in die leitende Gedankenkette erleichtert wird. Im ersten Teil wird die Bestimmung der Deformationen einer Fläche aus gegebenen Verzerrungen auf eine lineare, im allgemeinen nicht homogene partielle Differentialgleichung zurückgeführt, die in durchsichtiger vektorieller Form erscheint. Im zweiten, vom vorhergehenden unabhängigen Teil wird nachgewiesen, daß alle Spannungszustände einer Membran, die einem gegebenen System von außen auf sie wirkender Kräfte das Gleichgewicht halten, aus der allgemeinen Lösung einer Vektordifferentialgleichung abgeleitet werden können, die sich von der im ersten Teil aufgestellten nur durch ein anderes Störungsglied unterscheidet. Die Einführung der Komponenten der Vektorfunktion, die dieser Differentialgleichung genügen soll, nach drei gewissen Richtungen führt schließlich in ungezwungener Weise zu der verallgemeinerten Weingartenschen Differentialgleichung.

A. Deformationen einer Fläche.

1. Zerlegung in Drehung und reine Verzerrung. F sei eine gegebene Raumfläche[1]), $\mathfrak{r}$ der Ortsvektor ihres Punktes P (in bezug auf den festen Nullpunkt 0). Auf F seien zwei Scharen orthogonaler Koordinatenlinien mit den Bogenlängen s_1 und s_2 gedacht, deren Tangentenrichtungen durch die Einheitsvektoren $\mathfrak{t}_1 = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial s_1}$, $\mathfrak{t}_2 = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial s_2}$ gegeben sind; der Einheitsvektor der Flächennormale ist dann $\mathfrak{n} = \mathfrak{t}_1 \times \mathfrak{t}_2$.

F werde einer infinitesimalen Deformation unterworfen, d. h. es werde jeder Flächenpunkt $\mathfrak{r}$ um den Vektor

$$\delta \mathfrak{r} = \iota \bar{\mathfrak{r}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

in den Punkt $\bar{P}$ mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r} + \delta \mathfrak{r}$ verschoben; dabei bedeute $\bar{\mathfrak{r}}$ eine Funktion des Ortes auf F, ι eine vom Ort unabhängige positive Zahl, die eine gegen Null konvergierende Folge durchlaufe.

Wie transformieren sich die von P ausgehenden Tangentenvektoren $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial s} = \mathfrak{t}$ von F? Es wird

$$\mathfrak{t} + \delta \mathfrak{t} = \frac{\partial (\mathfrak{r} + \iota \bar{\mathfrak{r}})}{\partial s} = \mathfrak{t} + \iota \frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}}{\partial s}\ ^{2}),$$

---

[1]) Bezüglich der flächentheoretischen Grundlage sei hier nur verwiesen auf E. Cesàro, Vorlesungen über natürliche Geometrie, deutsche Ausgabe von G. Kowalewski, Leipzig 1901 (2. Aufl. 1926). Die vektorielle Darstellung wird dort freilich erst nachträglich (S. 320 ff.) eingeführt. Es muß auch bemerkt werden, daß bei Cesàro G_1 anderes Vorzeichen hat als hier. Jedoch ist das Vorzeichen von G_1 hier dasselbe wie in der zitierten Arbeit von Lagally, während dort G_1 entgegengesetzt bezeichnet ist als hier. — (Zusatz bei der Korrektur:) Die Grundgedanken der kinematischen Flächentheorie, aus der hier einiges vorausgesetzt wird, findet man kurz dargestellt in der vor mehreren Monaten erschienenen Arbeit von Lagally: Die Verwendung des begleitenden Dreibeins für den Aufbau der natürlichen Geometrie, Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Abteil., 1927, S. 5 ff.

[2]) Es ist zu beachten, daß $\mathfrak{t} + \delta \mathfrak{t}$ im allgemeinen kein Einheitsvektor ist; der bei der Deformation aus $\mathfrak{t}$ hervorgehende Tangentenvektor der deformierten Fläche in $\bar{P}$ wäre $\mathfrak{t} + \iota \mathfrak{t} \times \left(\frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}}{\partial s} \times \mathfrak{t} \right)$.

also

$$\delta \mathfrak{t} = \iota \frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}}{\partial s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Es ist bekannt, daß, wenn $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \cos\varphi + \mathfrak{t}_2 \sin\varphi$ ist, $\frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}}{\partial s_1} \cos\varphi + \frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}}{\partial s_2} \sin\varphi$,

folglich

$$\delta \mathfrak{t} = \delta \mathfrak{t}_1 \cos\varphi + \delta \mathfrak{t}_2 \sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

ist, und daß sich schreiben läßt

$$\frac{\delta \mathfrak{t}_1}{\iota} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}}{\partial s_1} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{t}_1 + \varepsilon_1 \mathfrak{t}_1 + \gamma_0 \mathfrak{t}_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,\mathrm{a}),$$

$$\frac{\delta \mathfrak{t}_2}{\iota} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}}{\partial s_2} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{t}_2 + \gamma_0 \mathfrak{t}_1 + \varepsilon_2 \mathfrak{t}_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4\,\mathrm{b});$$

hier liegt das Hauptgewicht auf der Uebereinstimmung des Koeffizienten von $\mathfrak{t}_2$ in (4 a) mit dem von $\mathfrak{t}_1$ in (4 b). Die Bedeutung dieser Zerlegung ist die folgende: ein Flächenelement von F, das P im Innern enthält, erleidet bei der Transformation (1) von F

erstens die Translation $\delta \mathfrak{r} = \iota \bar{\mathfrak{r}}$,
zweitens die Rotation $\iota \mathfrak{g}$,
drittens die reine Verzerrung, die durch die drei den Richtungen $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ zugeordneten Skalare $\iota \varepsilon_1$, $\iota \varepsilon_2$, $\iota \gamma_0$ bestimmt wird [1]).

2. Bestimmung des Drehvektors $\mathfrak{g}$ und der Verzerrungsgrößen ε_1, ε_2, γ_0 aus gegebenem Deformationsvektor $\bar{\mathfrak{r}}$. Wenn $\bar{\mathfrak{r}}$ gegeben ist, so lassen sich $\mathfrak{g}$ und ε_1, ε_2, γ_0 in bekannter Weise durch Differentiationen berechnen. Dabei ist nur zu beachten, daß, wenn $\bar{\mathfrak{r}}$ in der Form gegeben ist:

$$\bar{\mathfrak{r}} = \bar{r}\,\mathfrak{n} + \bar{r}_1 \mathfrak{t}_1 + \bar{r}_2 \mathfrak{t}_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

die Formeln gelten:

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}}{\partial s_1} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_1} \mathfrak{n} + \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial s_1} \mathfrak{t}_1 + \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial s_1} \mathfrak{t}_2 + \mathfrak{d}_1 \times \bar{\mathfrak{r}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,\mathrm{a}),$$

$$\frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}}{\partial s_2} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_2} \mathfrak{n} + \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial s_2} \mathfrak{t}_1 + \frac{\partial \bar{r}_2}{\partial s_2} \mathfrak{t}_2 + \mathfrak{d}_2 \times \bar{\mathfrak{r}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,\mathrm{b}),$$

wo

$$\mathfrak{d}_1 = G_1 \mathfrak{n} + T_0 \mathfrak{t}_1 + N_1 \mathfrak{t}_2 \quad . \quad . \quad (7\,\mathrm{a}), \qquad \mathfrak{d}_2 = G_2 \mathfrak{n} - N_2 \mathfrak{t}_1 - T_0 \mathfrak{t}_2 \quad . \quad . \quad (7\,\mathrm{b})$$

die »Krümmungsvektoren« der Koordinatenlinien sind [2]).

3. Bestimmung der Deformation $\bar{\mathfrak{r}}$ aus gegebenen Verzerrungsgrößen ε_1, ε_2, γ_0. Uns interessiert im Hinblick auf unsere Aufgabe mehr die Frage, wie $\bar{\mathfrak{r}}$ berechnet werden kann, wenn die Verzerrungsgrößen ε_1, ε_2, γ_0 gegeben sind. Wendet man auf (4 a) und (4 b) die Integrabilitätsbedingung [3])

$$\left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right)\frac{\partial}{\partial s_1} + \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right)\frac{\partial}{\partial s_2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

an, so findet man

$$\left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right)(\mathfrak{g} \times \mathfrak{t}_1) + \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right)(\mathfrak{g} \times \mathfrak{t}_2) + \left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right)(\varepsilon_1 \mathfrak{t}_1 + \gamma_0 \mathfrak{t}_2)$$
$$+ \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right)(\gamma_0 \mathfrak{t}_1 + \varepsilon_2 \mathfrak{t}_2) = 0$$

[1]) Die sachgemäßeste Darstellungsweise der Beziehungen (3), (4 a) und (4 b) wäre die mit Hilfe eines symmetrischen Tensors γ, des »Verzerrungstensors«:

$$\frac{\delta \mathfrak{t}}{\iota} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}}{\partial s} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{t} + \gamma\,\mathfrak{t};$$

γ kann man in der Form schreiben:

$$\gamma = \varepsilon_1 \mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{t}_1 + \gamma_0 (\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{t}_1) + \varepsilon_2 \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{t}_2.$$

[2]) Setzt man (6 a) und (6 b) in (4 a) und (4 b) ein, so erhält man durch Zerspaltung der beiden entstehenden Vektorgleichungen sechs skalare Gleichungen für die drei Komponentenbeträge von $\mathfrak{g}$ und für ε_1, ε_2, γ_0, die auf die bekannten Ausdrücke für diese Größen führen; zugleich bestätigt sich so die Möglichkeit der Schreibweise in der Form der Gleichungen (4 a) und (4 b).

[3]) Cesàro-Kowalewski, Vorlesungen über natürliche Geometrie, S. 198 f.

oder [wegen $\left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right)\mathfrak{t}_1 + \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right)\mathfrak{t}_2 = \left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right)\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial s_1} + \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right)\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial s_2} = 0$]

$$\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial s_1} \times \mathfrak{t}_2 - \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial s_2} \times \mathfrak{t}_1 = -\left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right)(\varepsilon_1 \mathfrak{t}_1 + \gamma_0 \mathfrak{t}_2) - \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right)(\gamma_0 \mathfrak{t}_1 + \varepsilon_2 \mathfrak{t}_2) \quad (9).$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung für den unbekannten Drehvektor $\mathfrak{g}$, über deren Lösung in Teil D einige Angaben gemacht werden sollen.

Wenn die Vektorfunktion $\mathfrak{g}$ gefunden ist, so ergibt sich aus ihr $\bar{\mathfrak{r}}$ mit Hilfe von (4a) und (4b)[1]).

B. Spannungen in einer Membran.

4. Die Spannungen. Wir betrachten eine Membran, die mit der Fläche F zusammenfällt. Wir denken sie uns ohne Biegungssteifigkeit, d. h. es sollen in ihr nur tangential gerichtete Spannungen wirken können. Genauer:

Denken wir uns aus F ein P enthaltendes Flächenelement von der Gestalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $d s_2$ und $d s_1$ ausgeschnitten, und bezeichnen wir die reduzierte Spannung, die an der Kathete $d s_2$ mit der inneren Normalen $\mathfrak{t}_1$ angreift, mit $\mathfrak{s}_1$, die an der anderen Kathete angreifende mit $\mathfrak{s}_2$, und ist φ der Winkel, den die innere Normale der Hypotenuse mit $\mathfrak{t}_1$ bildet, so ist bekanntlich die an dieser angreifende reduzierte Spannung

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_1 \cos\varphi + \mathfrak{s}_2 \sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

und es gilt die Darstellung

$$\mathfrak{s}_1 = \sigma_1 \mathfrak{t}_1 + \tau_0 \mathfrak{t}_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11\,a), \qquad \mathfrak{s}_2 = \tau_0 \mathfrak{t}_1 + \sigma_2 \mathfrak{t}_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11\,b)$$

mit Hilfe der Normalspannungen σ_1, σ_2 und der Schubspannung τ_0. Die drei den Richtungen $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ zugehörigen Spannungen σ_1, σ_2, τ_0 bestimmen also vollständig die Spannungsverhältnisse im Punkte P von F[2]).

5. Die äußeren Kräfte, die gegebenen Spannungen das Gleichgewicht halten. Denken wir uns aus der Membran F irgend ein von der geschlossenen Kurve c begrenztes Gebiet G ausgeschnitten, so muß, wenn die Spannungen einem System von außen auf F wirkender Kräfte $\mathfrak{f}$ das Gleichgewicht halten,

$$\int_c (-\mathfrak{s}_1 \sin\varphi + \mathfrak{s}_2 \cos\varphi)\, d s + \iint_G \mathfrak{f}\, d s_1\, d s_2 = 0$$

sein (wo φ den Winkel von $d s$ mit $d s_1$ bedeutet), also

$$\int_c (\mathfrak{s}_2\, d s_1 - \mathfrak{s}_1\, d s_2) + \iint_G \mathfrak{f}\, d s_1\, d s_2 = 0$$

oder $\left(\text{wegen } G_1 = -\frac{\partial \ln d s_1}{\partial s_2}, \quad G_2 = \frac{\partial \ln d s_2}{\partial s_1}\right)$

$$\iint \left[\left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right)\mathfrak{s}_2 - \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right)\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{f}\right] d s_1\, d s_2 = 0\,;$$

hieraus schließt man unter der Voraussetzung der Stetigkeit des Integranden in bekannter Weise:

$$\left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right)\mathfrak{s}_2 - \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right)\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{f} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Wenn die Spannungen gegeben sind, so kann man hiernach leicht das System der Kräfte, das diesen Spannungen äquivalent ist, durch Differentiationen berechnen.

6. Bestimmung der Spannungen aus gegebenen äußeren Kräften $\mathfrak{f}$. Wieder ist es aber gewöhnlich wichtiger, die unbekannten Spannungen σ_1, σ_2, τ_0 zu berechnen, die mit den äußeren Kräften $\mathfrak{f}$ im Gleichgewicht stehen, wenn diese gegeben sind. Wir können zur Erreichung dieses Zieles so verfahren:

Wir suchen zunächst zwei Vektorfunktionen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, die die Bedingung erfüllen:

$$\left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right)\mathfrak{x} + \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right)\mathfrak{y} = \mathfrak{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13);$$

---

[1]) Wenn $\mathfrak{g}$ gegeben wäre, so erhielte man ersichtlich (siehe Abschnitt 6) für $\bar{\mathfrak{r}}$ die Differentialgleichung $\frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}}{\partial s_1} \times \mathfrak{t}_1 + \frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}}{\partial s_2} \times \mathfrak{t}_2 = (\mathfrak{g} \times \mathfrak{t}_1) \times \mathfrak{t}_1 + (\mathfrak{g} \times \mathfrak{t}_2) \times \mathfrak{t}_2$, die auch nach der in Teil D dargestellten Methode behandelt werden könnte.

[2]) Die invariante Schreibweise der Beziehungen (10), (11a) und (11b) hätte mittels des symmetrischen »Spannungstensors« $\sigma = \sigma_1 \mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{t}_1 + \tau_0 (\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{t}_1) + \sigma_2 \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{t}_2$ zu erfolgen: $\mathfrak{s} = \sigma\, \mathfrak{t}$.

dies können wir in allgemeinster Weise dadurch erreichen, daß wir $\mathfrak{f}$ mit Hilfe einer willkürlichen Vektorfunktion des Ortes auf F, $\mathfrak{z}$, in die Summe zerlegen

$$\mathfrak{f} = \frac{\mathfrak{f}+\mathfrak{z}}{2} + \frac{\mathfrak{f}-\mathfrak{z}}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

und verlangen, daß

$$\left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right)\mathfrak{x} = \frac{\mathfrak{f}-\mathfrak{z}}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (15\,\mathrm{a}), \qquad \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right)\mathfrak{y} = \frac{\mathfrak{f}+\mathfrak{z}}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15\,\mathrm{b})$$

werde. Wir finden dann

$$\mathfrak{x} = e^{\int G_1 \partial s_2} \cdot \int e^{-\int G_1 \partial s_2} \cdot \frac{\mathfrak{z}-\mathfrak{f}}{2}\,\partial s_2 \quad (16\,\mathrm{a}), \qquad \mathfrak{y} = e^{-\int G_2 \partial s_1} \cdot \int e^{\int G_2 \partial s_1} \cdot \frac{\mathfrak{z}+\mathfrak{f}}{2}\,\partial s_1 \ ^{1}) \quad (16\,\mathrm{b});$$

[das erste Integral ist über ein Stück einer Koordinatenlinie der ersten Schar zu erstrecken, das zweite über ein Stück einer solchen der zweiten Schar; die Anfangspunkte der Integrationen kann man sich, etwa in einer gegebenen Kurve angeordnet, beliebig vorschreiben] [2]).

Nachdem $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ so bestimmt sind, können wir (12) in die Form bringen:

$$\left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right)(\mathfrak{s}_2 + \mathfrak{x}) + \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right)(-\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{y}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17);$$

dies ist aber gerade die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\mathfrak{s}_2 + \mathfrak{x}$ und $-\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{y}$ die beiden Ableitungen einer Vektorfunktion $\mathfrak{v}$ des Ortes P auf F sind, so daß sich hieraus die Darstellung ergibt:

$$\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{y} - \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18\,\mathrm{a}), \qquad \mathfrak{s}_2 = -\mathfrak{x} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18\,\mathrm{b}).$$

Nun folgt aus (11 a) und (11 b): $\mathfrak{s}_1 \times \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{s}_2 \times \mathfrak{t}_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19),$

und diese Gleichung ist sogar ein vollkommener Ausdruck dafür, daß $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ tangential gerichtet sind und daß $\mathfrak{s}_1 \mathfrak{t}_2 = \mathfrak{s}_2 \mathfrak{t}_1$ [3]) ist; denn zunächst gilt immer:

$$\mathfrak{s}_1 = \sigma' \mathfrak{n} + \sigma_1 \mathfrak{t}_1 + \tau' \mathfrak{t}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{s}_2 = \sigma'' \mathfrak{n} + \tau'' \mathfrak{t}_1 + \sigma_2 \mathfrak{t}_2 ,$$

ist aber (19) erfüllt, so folgt, wie leicht zu sehen:

$$\sigma' = \sigma'' = 0 , \qquad \tau' = \tau'' \,(= \tau_0).$$

Setzen wir die Ausdrücke (18 a) und (18 b) in (19) ein, so erhalten wir die Beziehung:

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s_1} \times \mathfrak{t}_2 - \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial s_2} \times \mathfrak{t}_1 = \mathfrak{x} \times \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{y} \times \mathfrak{t}_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20);$$

dies ist, wenn $\mathfrak{f}$ gegeben ist, wodurch ja nach (16 a) und (16 b) auch $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bestimmbar sind, eine partielle Differentialgleichung für $\mathfrak{v}$, und nach dem oben Gesagten liefert jede ihr genügende Funktion $\mathfrak{v}$ vermöge der Gleichungen (18 a) und (18 b) ein System von Spannungen auf F, das den Kräften $\mathfrak{f}$ das Gleichgewicht hält.

7. Zusatz. Ein anderes Verfahren zur Auffindung eines Vektorenpaares $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ wäre dieses:

Man sucht eine Funktion $\mathfrak{u}$ so zu bestimmen, daß

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{t}_1 , \qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{u} \times \mathfrak{t}_2$$

die Bedingung (13) erfüllen; dann muß

$$\left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right)(\mathfrak{u} \times \mathfrak{t}_1) + \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right)(\mathfrak{u} \times \mathfrak{t}_2) = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial s_1} \times \mathfrak{t}_2 - \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial s_2} \times \mathfrak{t}_1 = \mathfrak{f}$$

sein. Die Lösung dieser Differentialgleichung für $\mathfrak{u}$, die auch wieder die Form der Gleichungen (9) und (20) hat, wird im allgemeinen schwieriger sein als die Ausführung der Quadraturen (16 a) und (16 b), von denen sich wenigstens eine durch passende Wahl von $\mathfrak{z}$

---

[1]) Hier ist zu beachten, daß bei passender Wahl der Integrationskonstanten $e^{-\int G_1 \partial s_2} = \left|\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q_1}\right|$ und $e^{\int G_2 \partial s_1} = \left|\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial q_2}\right|$ ist, wo q_1 und q_2 Gaußsche Parameter sind; s. Cesàro-Kowalewski, l. c. S. 198.

[2]) Zur Erlangung größter Allgemeinheit ist es nicht nötig, $\mathfrak{z}$ ganz allgemein anzunehmen (man wird vielmehr $\mathfrak{z}$, wenn möglich, so wählen, daß die Berechnung von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ möglichst einfach wird); denn, hat man ein Funktionenpaar $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ gefunden, das der Bedingung (13) genügt, so erhält man jedes andere derartige Paar aus diesem ersichtlich durch Hinzufügen von $\frac{\partial \bar{\mathfrak{v}}}{\partial s_1}$, $\frac{\partial \bar{\mathfrak{v}}}{\partial s_2}$, wo $\bar{\mathfrak{v}}$ eine willkürliche Funktion bedeutet.

[3]) Daß also, mit anderen Worten, der Spannungstensor symmetrisch ist.

immer vermeiden läßt (gewiß z. B. wenn $\mathfrak{z} = \pm \mathfrak{f}$ gesetzt wird). Die Bestimmung eines partikulären Integrals kann aber in besonderen Fällen doch möglich sein und ist dann jedenfalls sehr nützlich. Z. B. liefert $\mathfrak{u} = \frac{p}{2}\mathfrak{r}$, wo p eine skalare Konstante bedeute, $\mathfrak{f} = -p\,\mathfrak{n}$; im Falle eines auf die Membran ausgeübten konstanten Normaldruckes kann man sich also bei der Herstellung der Differentialgleichung (20) für $\mathfrak{v}$ die Quadraturen (16a) und (16b) ganz ersparen. $\mathfrak{u} = \mathfrak{n}$ würde geben: $\mathfrak{f} = (N_1 + N_2)\,\mathfrak{n}$. Durch Superposition könnte man neue Formen von $\mathfrak{f}$ erhalten [1]).

C. Deformationen einer elastischen Membran und auf sie wirkende Kräfte.

8. Verschiedene Möglichkeiten des Zusammenhanges von Verzerrung und Spannung einer Membran. In Teil A betrachteten wir die infinitesimalen Deformationen einer gegebenen Raumfläche; das war eine Angelegenheit der reinen Geometrie, die nichts mit Spannungen zu tun hatte.

In Teil B studierten wir die Gleichgewichtszustände zwischen den Spannungen in einer der Form nach gegebenen Membran und einem System von außen auf diese wirkender Kräfte; dies war eine rein mechanische Untersuchung, die ganz unabhängig war von den möglichen Deformationen der Membran. Wenn diese sich auch unter dem Einfluß der Spannungen, die wir betrachteten, deformiert haben mochte, so durften wir uns doch jedenfalls diese Aenderung der Membranform ausgeführt denken und sie als von weiterhin unveränderter Gestalt, »erstarrt«, behandeln.

Die Entwicklungen des Teiles B haben deshalb Gültigkeit z. B. für eine unausdehnbar gedachte Membran; die Deformationen einer solchen sind verzerrungsfrei, sie sind reine Verbiegungen ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \gamma_0 = 0$). In einer unausdehnbaren Membran sind Spannungen ohne Verzerrung denkbar.

Eine längs einer geschlossenen Kurve eingespannte Seifenblase ist umgekehrt ein Beispiel für eine Membran, in der die Spannungen von infinitesimalen Deformationen unabhängig sind.

Wir wollen jetzt in Teil C annehmen, wir hätten es mit einer elastischen Membran F zu tun; das soll bekanntlich das Folgende heißen: Die infinitesimalen Deformationen von F sind mit den Spannungen in F durch das folgende Gesetz verknüpft: Es existiert eine Funktion φ, das »elastische Potential« der Membran, die außer vom Ort auf F nur von den reinen Verzerrungsgrößen ε_1, ε_2, γ_0 abhängt, mit deren Hilfe man die bei einer Deformation $\delta\mathfrak{r} = \iota\bar{\mathfrak{r}}$ des Gebietes G auf F von den Spannungen am Rande von G und den äußeren auf G wirkenden Kräften $\mathfrak{f}$ geleistete Arbeit in der Form ausdrücken kann:

$$\iint_G \delta\varphi\, d s_1\, d s_2.$$

Aus diesem Ansatz ergibt sich in bekannter Weise:

$$\sigma_1 = -\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_1}, \qquad 2\tau_0 = -\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_0}, \qquad \sigma_2 = -\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Ob wir nun die Abhängigkeit der Spannungen von den Verzerrungen in der Form des Hookeschen Gesetzes voraussetzen wollen — was darauf hinausläuft, daß φ als quadratische Form in ε_1, ε_2, γ_0 angenommen wird — oder nicht, hier kommt es uns nur darauf an, daß es bei einer Membran, die aus einem Material mit bekannten elastischen Eigenschaften besteht, möglich ist, in jedem Punkte die Verzerrungen aus den Spannungen zu berechnen.

9. Gang der Bestimmung der infinitesimalen Deformation $\delta\mathfrak{r}$ aus einem gegebenen System äußerer Kräfte $\mathfrak{f}$. Während es nach dem bisher Gesagten durch einfache Differentiationen gelingt, die äußeren Kräfte $\mathfrak{f}$ zu finden, die auf die gegebene Membran F ausgeübt werden müssen, damit diese eine vorgeschriebene Deformation erleide, erfordert die umgekehrte Aufgabe unter anderem die Lösung zweier partieller Vektordifferentialgleichungen (9) und (20), die allerdings in ihren linken Seiten identisch sind. Zunächst sind mit Hilfe einer willkürlichen Vektorfunktion $\mathfrak{z}$ des Ortes auf F aus (16a) und (16b) die Hilfsfunktionen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ zu bestimmen; dann ist das Integral $\mathfrak{v}$ der Differentialgleichung (20) zu suchen (siehe Teil D). (18a) und (18b) liefern alsdann die Spannungen.

[1]) Die Spannungen, die aus dem Tensor $N_2\mathfrak{t}_1\cdot\mathfrak{t}_1 + T(\mathfrak{t}_1\cdot\mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t}_2\cdot\mathfrak{t}_1) + N_1\mathfrak{t}_2\cdot\mathfrak{t}_2$ entspringen, sind den Kräften $\mathfrak{f} = 2(N_1N_2 - T^2)\,\mathfrak{n}$ äquivalent; diese Aussage ist mit den Codazzi-Mainardischen Gleichungen der Flächentheorie gleichbedeutend.

Ein physikalisches Gesetz, das seinen mathematischen Ausdruck in der Form der Beziehungen (21) erhält, gibt die durch die nunmehr bekannten Spannungen hervorgerufenen Verzerrungen. Aus diesen können wir jetzt durch Auflösen der Differentialgleichung (9) (siehe Teil D) den Vektor $\mathfrak{g}$ der infinitesimalen, in der Deformation enthaltenen Drehung berechnen; aus diesem ergibt sich der Deformationsvektor $\mathfrak{r}$ durch Integration der Gleichungen (4 a) und (4 b).

D. Die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial s_1} \times \mathfrak{t}_2 - \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial s_2} \times \mathfrak{t}_1 = \mathfrak{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

10. Zurückführung auf eine skalare partielle Differentialgleichung. Die in Teil A und B auftretenden Gleichungen (9) und (20) haben beide die Form der in der Ueberschrift stehenden Gl. (22), wo $\mathfrak{a}$ eine bekannte Vektorfunktion des Ortes auf F ist.

Wir wollen sie durch drei mit ihr gleichbedeutende skalare Gleichungen ersetzen. Es

$$\mathfrak{w} = u\,\mathfrak{t}_1 + v\,\mathfrak{t}_2 + w\,\mathfrak{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Dann wird:

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial s_1} = \frac{\partial u}{\partial s_1}\mathfrak{t}_1 + \frac{\partial v}{\partial s_1}\mathfrak{t}_2 + \frac{\partial w}{\partial s_1}\mathfrak{n} + \mathfrak{d}_1 \times \mathfrak{w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24\,\mathrm{a}),$$

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial s_2} = \frac{\partial u}{\partial s_2}\mathfrak{t}_1 + \frac{\partial v}{\partial s_2}\mathfrak{t}_2 + \frac{\partial w}{\partial s_2}\mathfrak{n} + \mathfrak{d}_2 \times \mathfrak{w} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24\,\mathrm{b}).$$

Aus (22) ergibt sich also in Verbindung mit (23), (24 a), (24 b)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s_1}\mathfrak{t}_1 + \frac{\partial v}{\partial s_1}\mathfrak{t}_2 + \frac{\partial w}{\partial s_1}\mathfrak{n}\right) \times \mathfrak{t}_2 - \left(\frac{\partial u}{\partial s_2}\mathfrak{t}_1 + \frac{\partial v}{\partial s_2}\mathfrak{t}_2 + \frac{\partial w}{\partial s_2}\mathfrak{n}\right) \times \mathfrak{t}_1 + [\mathfrak{d}_1 \times \mathfrak{w}] \times \mathfrak{t}_2 - [\mathfrak{d}_2 \times \mathfrak{w}] \times \mathfrak{t}_1$$
$$= \mathfrak{a} = a\,\mathfrak{t}_1 + b\,\mathfrak{t}_2 + c\,\mathfrak{n}$$

oder

$$\frac{\partial u}{\partial s_1}\mathfrak{n} - \frac{\partial w}{\partial s_1}\mathfrak{t}_1 + \frac{\partial v}{\partial s_2}\mathfrak{n} - \frac{\partial w}{\partial s_2}\mathfrak{t}_2 - \mathfrak{d}_1(\mathfrak{w}\,\mathfrak{t}_2) + \mathfrak{w}(\mathfrak{d}_1\,\mathfrak{t}_2) + \mathfrak{d}_2(\mathfrak{w}\,\mathfrak{t}_1) - \mathfrak{w}(\mathfrak{d}_2\,\mathfrak{t}_1) = a\,\mathfrak{t}_1 + b\,\mathfrak{t}_2 + c\,\mathfrak{n}$$

oder

$$\mathfrak{n}\left(\frac{\partial u}{\partial s_1} + \frac{\partial v}{\partial s_2}\right) - \frac{\partial w}{\partial s_1}\mathfrak{t}_1 - \frac{\partial w}{\partial s_2}\mathfrak{t}_2 - v\,G_1\,\mathfrak{n} - v\,T_0\,\mathfrak{t}_1 - v\,N_1\,\mathfrak{t}_2 + u\,N_1\,\mathfrak{t}_1 + v\,N_1\,\mathfrak{t}_2 + w\,\mathrm{N}_1\,\mathfrak{n}$$
$$+ u\,G_2\,\mathfrak{n} - u\,N_2\,\mathfrak{t}_1 - u\,T_0\,\mathfrak{t}_2 + u\,N_2\,\mathfrak{t}_1 + v\,N_2\,\mathfrak{t}_2 + w\,N_2\,\mathfrak{n} = a\,\mathfrak{t}_1 + b\,\mathfrak{t}_2 + c\,\mathfrak{n} \quad (25),$$

folglich

$$-\left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right)v + \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right)u + w\,(N_1 + N_2) = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26),$$

$$u\,N_1 - v\,T_0 = \frac{\partial w}{\partial s_1} + a \quad . \quad (27), \qquad -u\,T_0 + v\,N_2 = \frac{\partial w}{\partial s_2} + b \quad . \quad (28).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen fließt:

$$u = \frac{1}{K}\left(N_2\frac{\partial w}{\partial s_1} + T_0\frac{\partial w}{\partial s_2} + N_2\,a + T_0\,b\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29),$$

$$v = \frac{1}{K}\left(N_1\frac{\partial w}{\partial s_2} + T_0\frac{\partial w}{\partial s_1} + N_1\,b + T_0\,a\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30);$$

durch Einsetzen in (26) erhalten wir also für w die Differentialgleichung:

$$\left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right)\frac{-\frac{\partial w}{\partial s_1}\cdot T_0 - \frac{\partial w}{\partial s_2}\cdot N_1}{K} + \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right)\frac{\frac{\partial w}{\partial s_1}\cdot N_2 + \frac{\partial w}{\partial s_2}\cdot T_0}{K}$$
$$+ 2\,H\,w = c - \left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right)\frac{-a\,T_0 - b\,N_1}{K} - \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right)\frac{a\,N_2 + b\,T_0}{K} \quad . \quad . \quad (31).$$

Sobald w bestimmt ist, geben die Gleichungen (29) und (30) u und v.

Schluß. Die Differentialgleichung (31) ist, wenn ihre rechte Seite verschwindet, identisch mit der »charakteristischen Differentialgleichung«, auf die Weingarten[1]) das Problem der infinitesimalen Verbiegung der Fläche F zurückführte; in der Tat verschwindet die rechte Seite von (9), wenn die Verzerrungsgrößen null sind. w ist in diesem Falle die »charakteristische Funktion«. Wie man sieht, hängt das Problem der Bestimmung der

[1]) Journal für die reine und angewandte Mathematik 100, S. 296 ff.

Spannungen, wenn keine äußeren Kräfte $\mathfrak{f}$ auf die Membran F wirken, von derselben homogenen Gleichung ab; in dieser rein formalen Weise gibt sich bei der hier durchgeführten Betrachtungsweise der Zusammenhang zwischen diesem Problem und dem der infinitesimalen Verbiegung kund, der bei Lagally den Ausgangspunkt bildet, insofern er zunächst die Drehrisse von F als Kräftepläne für die in der Membran bei fehlenden Kräften $\mathfrak{f}$ möglichen Systeme von Spannungen nachweist.

Es wird jedoch die Gleichung (31) durchaus nicht nur in den soeben genannten Fällen homogen; vielmehr gibt es unendlich viele Systeme von Verzerrungen bzw. von äußeren Kräften, die die rechte Seite von (9) bzw. von (20) zu Null machen. Ferner führt z. B., wenn $a = \frac{\partial \psi}{\partial s_1}$, $b = \frac{\partial \psi}{\partial s_2}$, $c = -2H\psi$ ist, wo ψ eine bekannte Funktion sei, die Substitution $w + \psi = w'$ auf die charakteristische Gleichung für w'.

Während von uns bei der Bestimmung der Deformationen aus beliebig gegebenen Verzerrungen, die auf die schon von Lagally aufgestellte Differentialgleichung zurückgeführt wird, von vornherein w in der von Volterra für den Fall verschwindender Verzerrungen gegebenen Deutung als Normalkomponente des Drehvektors $\mathfrak{w} = \mathfrak{g}$ eingeführt wird, scheint eine ähnlich anschauliche Deutung im Falle der Bestimmung der Spannungen aus gegebenen äußeren Kräften $\mathfrak{f}$ nicht möglich zu sein; allenfalls könnte man $\mathfrak{w} = \mathfrak{v}$ gemäß (18a) und (18b) als eine Art von vektorieller Spannungsfunktion bezeichnen, jedoch bestehen wesentliche Unterschiede zwischen $\mathfrak{v}$ und dem, was man sonst Spannungsfunktion zu nennen pflegt. 770

Über eine Randwertaufgabe bei der verallgemeinerten Wärmeleitungs-Gleichung.

Von **A. HUBER** in Wien.

In den letzten Jahren haben verschiedene physikalische Probleme auf partielle Differentialgleichungen vom parabolischen Typus geführt, die man als Verallgemeinerungen der schon seit langer Zeit eingehend behandelten eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

betrachten kann. Diese Verallgemeinerung bezieht sich darauf, daß man die Leitfähigkeit K, die spezifische Wärme und die Dichte nicht als Konstanten, sondern als Funktionen von x in den Ansatz aufnimmt. Die sich dann ergebende Gleichung

$$f(x) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K(x) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right]$$

läßt sich durch eine Transformation, wie sie bei den gewöhnlichen Gleichungen vom Sturm-Liouvilleschen Typus zweckmäßig ist, leicht in die Gestalt

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - X(x) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

bringen. Führen wir nämlich die neue Variable

$$x' = \int^x \frac{dx}{K(x)}$$

ein, so erhalten wir offenbar eine Gleichung von der angegebenen Form. In diese läßt sich auch die allgemeinere Gleichung

$$f(x) \cdot g(y) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + h(x) \frac{\partial z}{\partial x}$$

überführen, wenn man die folgenden neuen Variablen benutzt:

$$\xi = \int e^{-\int h(x)\,dx}\, dx; \quad \eta = \int \frac{dy}{g(y)}.$$

Es sei aber schon jetzt betont, daß diese Transformationen der numerischen Durchführung des Problemes gleich am Anfang im allgemeinen unüberwindliche Schwierigkeiten bereiten werden, da man ja auch die ξ und η wieder durch die x und y ausdrücken muß, wozu jedoch die Umkehrung von Integralen erforderlich wird, die natürlich nur in wenigen Fällen durch bekannte Funktionen geleistet werden kann.

Aber nicht nur Aufgaben aus der Theorie der Wärmeleitung führen auf derartige Gleichungen, sondern auch Untersuchungen über die bei ungeordneter Bewegung von Wasser oder Luft auftretenden Austauscherscheinungen, wie am Schlusse dieses Aufsatzes an einem Beispiele gezeigt werden soll[1]).

1. Die Eindeutigkeit der Lösung. Bei den Anwendungsproblemen handelt es sich meistens darum, eine solche Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - X(x)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

zu finden, die auf dem Rande R eines gewissen Bereiches $\mathfrak{B}$ der Variablen x, y vorgegebene Werte annimmt. Unter der Voraussetzung, daß der Koeffizient $X(x)$ im Bereiche $\mathfrak{B}$ nirgends negativ wird, läßt sich der von Volterra[2]) für die Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y)$ gegebene Eindeutigkeitsbeweis auch auf unsere Gleichung (A) übertragen, wenn $\mathfrak{B}$ ein endlicher oder ein sich nur in der Richtung der positiven y-Achse ins Unendliche erstreckender Bereich ist. Den Ausgangspunkt hierzu bildet die der Greenschen Formel der Potentialtheorie analoge Relation

$$2\iint_{\mathfrak{B}}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \cdot dx \cdot dy = \int_R X \cdot z^2 \cdot dx + 2\,z\frac{\partial z}{\partial x}\,dy\,^3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

wo z eine Lösung von (A) sein soll. Der Eindeutigkeitsbeweis selber ergibt sich dann in der üblichen Weise daraus, daß eine auf dem Rande R verschwindende Lösung auch auf dem im Innern von $\mathfrak{B}$ liegenden Stücke jeder Charakteristik und daher im ganzen Bereiche $\mathfrak{B}$ identisch Null sein muß.

Wir legen den folgenden Betrachtungen den durch $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ bestimmten unendlichen Bereich zugrunde und wollen für diesen den Eindeutigkeitssatz formulieren. Hierzu wendeu wir auf das von den Geraden $x = 0$, $x = a$; $y = 0$, $y = b$ begrenzte Rechteck $\mathfrak{B}'$ die Formel (1) an und erhalten nach Ausführung der Randintegration:

$$2\iint_{\mathfrak{B}'}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 dx\,dy = \int_0^a X\cdot[(z^2)_{y=0} - (z^2)_{y=b}]\,dx - 2\int_0^b\left[\left(z\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=0} - \left(z\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=a}\right]dy \quad (2).$$

Wenn nun $z(0, y) = z(x, 0) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} z(x, y) = 0$ angenommen werden, so ergibt sich aus (2) unter der Voraussetzung, daß die Integrale für $a \to \infty$ überhaupt existieren:

$$2\iint_{\mathfrak{B}^*}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \cdot dx \cdot dy + \int_0^\infty X\cdot(z^2)_{y=b}\,dx = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

wobei $\mathfrak{B}^*$ den in der $+x$-Richtung unendlichen Streifen von der Breite b bedeutet, der links von der y-Achse begrenzt wird. Da aber alle Glieder von (3) positiv sind, so muß $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ sein, im Innern von $\mathfrak{B}^*$ und z selber auf dem in $\mathfrak{B}^*$ liegenden Stücke der Charakteristik $y = b$ verschwinden. Wenn wir also berücksichtigen, daß in der Praxis meistens solche Lösungen der Gleichung (A) gesucht werden, die für $x \to \infty$ verschwinden, so können wir für unsere Zwecke den Eindeutigkeitssatz kurz so aussprechen:

»Die Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - X(x)\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, wo $X(x)$ für $x \geqq 0$ nirgends negativ wird, besitzt nur eine einzige Lösung $\zeta(x, y)$, so daß

$$\lim_{x \to \infty}\zeta(x, y) = 0; \qquad \lim_{x \to +0}\zeta(x, y) = f(y); \qquad \lim_{y \to +0}\zeta(x, y) = g(x).$$

---

[1]) Vergl. Wilh. Schmidt, Der Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen (1925), Bd. VII der bei H. Grand in Hamburg erscheinenden Sammlung »Probleme der kosmischen Physik«.

[2]) V. Volterra, Leçons sur l'intégration des équations differentielles aux dérivées partielles (1912) S. 64 f.

[3]) Bezüglich des Beweises vergl. etwa die unter 2) angeführte Stelle oder E. Goursat, Cours d'analyse mathématique, III. Bd., S. 308 f. der 3. Auflage.

2. Die Randwertaufgabe. Wir wollen nun einen Weg angeben, wie man eine solche Lösung $\zeta(x, y)$ der Gleichung (A) finden kann, welche den folgenden Bedingungen genügt:

$$\lim_{x \to +0} \zeta = f(y); \qquad \lim_{y \to +0} \zeta = 0; \qquad \lim_{x \to \infty} \zeta = 0.$$

Auf diese Randwertaufgabe läßt sich die allgemeinere zurückführen, bei der $g(x) \neq 0$, doch wollen wir uns diesbezüglich nur mit einer kurzen Bemerkung begnügen, da diese Reduktion im allgemeinen praktisch so gut wie undurchführbar ist. Durch den Ansatz $z = p(x) \cdot q(y)$ kann man nämlich die Gleichung (A) in zwei gewöhnliche Gleichungen spalten. Die Gleichung zweiter Ordnung für $p(x)$ bietet sodann Anlaß zur Bildung von Eigenfunktionen, nach denen $g(x)$ entwickelbar sein möge. Aus diesen Eigenfunktionen und den dazu gehörigen Lösungen für $q(y)$ läßt sich dann unter gewissen Bedingungen eine Lösung $\overline{\zeta}(x, y)$ von (A) zusammensetzen, so daß $\lim_{y \to +0} \overline{\zeta} = g(x)$. Wird nun $\lim_{x \to +0} \overline{\zeta} = \overline{f}(y)$ und bestimmt man eine solche Lösung $\zeta^*(x, y)$ von (A), daß $\lim_{y \to +0} \zeta^* = 0$ und $\lim_{x \to +0} \zeta^* = f(y) - \overline{f}(y)$ werden, so ist $\zeta = \overline{\zeta} + \zeta^*$ die ursprünglich gewünschte Lösung von (A). Zur Erledigung der allgemeineren Randwertaufgabe ist also auch die der oben angegebenen erforderlich, und mit dieser wollen wir uns im folgenden nur beschäftigen. Es wird sich zeigen, daß man, sobald ein geeignetes und nur von einem Parameter abhängiges partikuläres Integral der Gleichung (A) bekannt ist, diese Randwertaufgabe auf die Auflösung einer Volterraschen Integralgleichung erster Art zurückführen kann.

Da nämlich in der Gleichung (A) die Variable y explizite nicht vorkommt, so ist zugleich mit $Z(x, y)$ auch $Z(x, y - \eta)$ eine Lösung. Ist nun $Z(x, y)$ weiter noch so beschaffen, daß

$$\lim_{y \to +0} Z(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4), \qquad \lim_{x \to \infty} Z(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

dann läßt sich leicht einsehen, daß auch

$$J(x, y) = \int_0^y Z(x, y - \eta) \cdot \Phi(\eta)\, d\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

eine Lösung von (A) ist, wenn nur das Integral existiert. Es wird nämlich:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = \int_0^y \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \cdot \Phi(\eta)\, d\eta, \qquad \frac{\partial J}{\partial y} = \int_0^y \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot \Phi(\eta)\, d\eta + \lim_{\eta_1 \to y} [Z(x, y - \eta) \cdot \Phi(\eta)],$$

also wegen (4):

$$\frac{\partial J}{\partial y} = \int_0^y \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot \Phi(y)\, d\eta,$$

so daß tatsächlich wird:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} - X \frac{\partial J}{\partial y} = \int_0^y \left[\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - X \frac{\partial Z}{\partial y}\right] \cdot \Phi(\eta) \cdot d\eta = 0.$$

Soll nun $\lim_{x \to +0} J(x, y) = f(y)$ werden und machen wir die Annahme, daß der Grenzübergang mit der Integration vertauschbar ist, so erhalten wir zur Bestimmung von $\Phi(y)$ die folgende Volterrasche Integralgleichung erster Art:

$$f(y) = \int_0^y Z(+0, y - \eta) \cdot \Phi(\eta) \cdot d\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Hat man also eine solche Randwertaufgabe zu lösen, so muß man sich zuvörderst ein die Bedingungen (4) und (5) befriedigendes partikuläres Integral der Gleichung (A) verschaffen, und darüber gilt der folgende Satz:

»Es gibt keine in y analytische Lösung der Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - X(x) \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, die für $y = 0$ verschwindet.«

Setzen wir nämlich in (A)

$$z = a_0(x) + y \cdot a_1(x) + y^2 \cdot a^2(x) + \ldots,$$

so erhalten wir zur Berechnung der $a_i(x)$ die folgenden Gleichungen

$$a_0'' - X \cdot a_1 = 0; \qquad a_1'' - 2X \cdot a_2 = 0 \ldots; \qquad a_{k-1}'' - k \cdot X \cdot a_k = 0 \ldots$$

Wird also $a_0(x) = \alpha \cdot x + \beta$ angenommen, so werden sämtliche $a_i(x) \equiv 0$, woraus sich unser Satz sofort als Sonderfall ergibt. Eine Lösung von (A), die für $y = 0$ verschwindet, muß also von unendlich hoher Ordnung verschwinden. Ein besonderes Verhalten einer solchen Lösung wird jedoch an jenen Stellen zu erwarten sein, an denen $X(x) = 0$ wird.

Diese Ueberlegungen zeigen, daß etwa die folgenden Ansätze geeignete partikuläre Integrale liefern werden:

$$z = \varphi(x, y) \cdot e^{\frac{\psi(x)}{y}}; \qquad z = \int_\alpha^\beta e^{-\frac{\varphi(x)}{y} \cdot t} \cdot T(x, t)\, dt.$$

Dabei ist über $X(x)$ und die in den Ansätzen stehenden Funktionen und Integrationsgrenzen so zu verfügen, daß die als Koeffizienten der einzelnen Potenzen von y auftretenden Funktionen von x identisch verschwinden. Aus den so gewonnenen Differentialgleichungen lassen sich dann die betreffenden Funktionen ermitteln.

3. Die Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x^\alpha \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ . . . . . (I).

Auf diese Gleichung läßt sich eine von Kępiński[1]) behandelte zurückführen, wie Gevrey[2]) gezeigt hat. Die genannten Autoren benutzen eine von zwei Parametern abhängige Partikulärlösung, die in diesen Parametern der adjungierten Gleichung genügt, und lösen damit nach der Green-Riemannschen Methode ziemlich allgemeine Randwertaufgaben, freilich ohne irgendwelche Rücksicht auf die Bedürfnisse der angewandten Mathematik.

Für unseren Zweck genügt das durch den Ansatz $Z = \varphi(y) \cdot e^{\frac{\psi(x)}{y}}$ gelieferte partikuläre Integral

$$Z(x, y - \eta) = (y - \eta)^{-\frac{1+\alpha}{2+\alpha}} \cdot e^{-\frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+2)^2 (y-\eta)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

das für $\alpha > -2$ und $y > \eta$ offenbar den oben gestellten Forderungen entspricht und für $\alpha = 0$ in die bekannte Fundamentallösung der gewöhnlichen Wärmeleitungsgleichung übergeht. Insbesondere verschwindet es für $x > 0$ von unendlich hoher Ordnung, wenn $y - \eta \to +0$, während sein Wert an der Stelle $x = 0$, $y = \eta$ in leicht erkennbarer Weise von dem Wege abhängt, auf dem man sich dieser Stelle nähert. Mit Benutzung von (8) können wir nun auf Grund der früheren Ueberlegungen leicht eine Lösung $\zeta(x, y)$ der Gleichung (I) finden, für die

$$\lim_{x \to \infty} \zeta = \lim_{y \to +0} \zeta = 0; \qquad \lim_{x \to +0} \zeta = f(y).$$

Wegen $\lim_{x \to +0} Z(x, y - \eta) = (y - \eta)^{-\frac{1+\alpha}{2+\alpha}}$ haben wir hierzu nach (7) die Funktion $\Phi(y)$ so zu bestimmen, daß

$$f(y) = \int_0^y (y - \eta)^{-\nu} \cdot \Phi(\eta)\, d\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

wobei der Kürze wegen $\nu = \frac{1+\alpha}{2+\alpha}$ gesetzt wurde. Wird zunächst $\alpha > -1$ angenommen, dann wird $0 < \nu < 1$, und (9) ist die bekannte Abelsche Integralgleichung mit der Lösung[3]):

$$\Phi(y) = \frac{\sin \nu \pi}{\pi} \cdot \left[f(0) \cdot y^{\nu-1} + \int_0^y \frac{f'(t)\, dt}{(y-t)^{1-\nu}} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

---

[1]) S. Kępiński, Ueber die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{m+1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{n}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = 0$, Mathematische Annalen, 61. Band (1905).

[2]) M. Gevrey, Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique, Journ. de math. p. e. a. 6. Serie, 10. Band (1914).

[3]) Man vergl. etwa R. v. Mises, Einführung in die Theorie der Integralgleichungen, diese Zeitschr. 5. Bd. (1925), S. 150 bis 172, insbes. S. 157 ff.

Somit ergibt sich als Lösung unserer Randwertaufgabe:

$$\zeta(x, y) = \frac{\sin \nu \pi}{\pi} \int_0^y \frac{e^{-\frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+2)^2 (y-\eta)}}}{(y-\eta)^\nu} \left[\frac{f(0)}{\eta^{1-\nu}} + \int_0^\eta \frac{f'(t)\, dt}{(\eta - t)^{1-\nu}} dt \right] d\eta \quad . \quad . \quad (11).$$

Daraus läßt sich nun leicht eine Darstellung finden, bei der nur die Auswertung eines einfachen Integrales erforderlich ist, indem wir zunächst auf das Doppelintegral die Dirichletsche Umformung anwenden:

$$\zeta(x, y) = \frac{\sin \nu \pi}{\pi} \cdot \left[\int_0^y \frac{f(0)}{\eta^{1-\nu}} \cdot \frac{e^{-\frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+2)^2 (y-\eta)}}}{(y-\eta)^\nu} d\eta + \int_0^y f'(t)\, dt \int_t^y \frac{e^{-\frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+2)^2 (y-\eta)}}}{(y-\eta)^\nu (\eta - t)^{1-\nu}} d\eta \right].$$

Ferner setzen wir

$$F(x\ y; t) = \int_t^y \frac{e^{-\frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+2)^2 (y-\eta)}}}{(y-\eta)^\nu (\eta - t)^{1-\nu}} d\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

und integrieren im Doppelintegral partiell, wobei der ausintegrierte Bestandteil wegen $F(x, y; y) = 0$ an der oberen Grenze verschwindet, während sich der für ihn an der unteren Grenze ergebende Wert gerade gegen das vorne stehende einfache Integral weghebt, so daß nur bleibt:

$$\zeta(x, y) = -\frac{\sin \nu \pi}{\pi} \int_0^y f(t) \frac{\partial F}{\partial t} \cdot dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Führen wir nun durch $\eta = (y - t) \cdot s + t$ in (12) die neue Integrationsvariable s ein, so liefert die Differentiation nach t:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+2)^2 (y-t)^2} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+2)^2 (y-t)(1-s)}}}{(1-s)^{1+\nu} s^{1-\nu}} \cdot ds.$$

Indem wir hier an Stelle von s die Integrationsvariable

$$v = \frac{s}{1-s} \cdot e^{-\frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+2)^2 (y-t)}}$$

substituieren, kommt nach einfacher Rechnung

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\Gamma(\nu) \cdot x \cdot e^{-\frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+2)^2 (y-t)}}}{(\alpha+2)^{\frac{\alpha+2}{2}} \cdot (y-t)^{2-\nu}}.$$

Wenn wir dies in (13) einsetzen und die Beziehung $\Gamma(\nu) \cdot \Gamma(1-\nu) = \frac{\pi}{\sin \nu \pi}$ beachten, so erhalten wir schließlich:

$$\zeta(x, y) = \frac{x}{(2+\alpha)^{\frac{2}{2+\alpha}} \Gamma\left(\frac{1}{2+\alpha}\right)} \cdot \int_0^y \frac{e^{-\frac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+2)^2 (y-t)}}}{(y-t)^{\frac{3+\alpha}{2+\alpha}}} \cdot f(t) \cdot dt \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Diese Darstellung gilt unabhängig davon, ob $f(0) = 0$ oder $\neq 0$ ist, und damit befinden wir uns auch in Uebereinstimmung mit der entsprechenden Eigenschaft der bekannten Lösung derselben Randwertaufgabe bei der gewöhnlichen Wärmeleitungsgleichung [1]), die sich aus (14) wegen $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ für $\alpha = 0$ sofort ergibt.

Den in den Anwendungen kaum auftretenden Fall $-2 < \alpha \leqq -1$ wollen wir nur mit der kurzen Bemerkung erledigen, daß man dabei nach wiederholter Differentiation der Gl. (9) entweder überhaupt nur die Umkehrung eines bestimmten Integrales zu leisten hat oder daß man wieder zu einer Abelschen Integralgleichung kommt, je nachdem der so-

[1]) Vergl. etwa Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik. II. Bd., S. 104 der 5. Aufl. (1910), oder Goursat, a. a. O., S. 308.

dann positive Exponent ν eine ganze Zahl ist oder nicht. Dabei muß $f(y)$ Ableitungen von genügend hoher Ordnung haben, die im ersten Falle für $y = 0$ auch verschwinden müssen. Die Behandlung des Falles $a \leqq -2$ ist nach der angegebenen Methode aus leicht ersichtlichen Gründen überhaupt unmöglich.

Wir wollen nun unsere Randwertaufgabe dahin abändern, daß wir verlangen, es soll die gesuchte Lösung $\zeta(x, y)$ nicht entlang der y-Achse, sondern auf der im Abstande $x_0 > 0$ verlaufenden Parallelen hierzu die vorgegebenen Werte $f(y)$ annehmen. Gemäß (7) ist dann die Funktion $\Phi(y)$ so zu bestimmen, daß:

$$f(y) = \int_0^y (y-\eta)^{-\nu} \cdot e^{-\frac{a}{y-\eta}} \cdot \Phi(\eta)\, d\eta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

wird, wobei $\frac{{x_0}^{a+2}}{(a+2)^2} = a > 0$ gesetzt wurde. Man sieht sofort, daß alle Versuche, diese Gleichung erster Art auf eine der üblichen Weisen in eine solche zweiter Art überzuführen, vergeblich sein werden. Ich konnte zwar keine für die numerische Auswertung geeignete Form der Lösung von (15) finden[1]), doch sieht man leicht, daß sie, falls $f(y)$ endlich und stetig ist, nur dann gelöst werden kann, wenn $f(y)$ für $y \to +0$ von unendlich hoher Ordnung verschwindet. Setzen wir nämlich in (15) $\eta = y \cdot t$ so kommt:

$$f y = y^{1-\nu} \cdot \int_0^1 (1-t)^{-\nu} e^{-\frac{a}{y} \cdot \frac{1}{1-t}} \cdot \Phi(y \cdot t) \cdot d t .$$

Da ferner im ganzen Integrationsgebiet stets $\frac{1}{1-t} \geqq 1$ ist, so gilt

$$f(y) < y^{1-\nu} \cdot e^{-a/y} \cdot \int_0^1 (1-t)^{-\nu} \cdot \Phi(y \cdot t)\, d t .$$

Weil aber $\Phi(y)$ insbesondere für $y \to +0$ höchstens von einer Ordnung, die kleiner als Eins ist, unendlich werden kann, so hat das rechts stehende Integral sicher einen endlichen Wert, womit aber unsere Behauptung bewiesen ist. Diese notwendige Bedingung für die Existenz einer Lösung der Gl. (15) steht in bemerkenswertem Einklange mit der bereits früher festgestellten Eigenschaft jener Lösungen der Gl. (A), die entlang der x-Achse verschwinden.

4. Ein Anwendungsbeispiel: Feuchtigkeitsausgleich durch Austauschbewegung. Wir denken uns eine unendliche Ebene, über der sich Luft in ungeordneter Bewegung befinden möge, und die samt der darüber befindlichen Luft bis zur Zeit $t = 0$ absolut trocken sein soll, während im Zeitpunkte $t = 0$ selber die ganze Ebene plötzlich bis zur Sättigung befeuchtet und in diesem Zustand dauernd erhalten wird. Infolge des durch die ungeordnete Bewegung der Luft eintretenden Austausches wird Wasserdampf in die Höhe aufsteigen, und die Aufgabe besteht nun darin, festzustellen, welchen Feuchtigkeitsgrad s eine in der Höhe $z > 0$ über unserer Ebene befindliche Luftschichte zur Zeit $t > 0$ aufweisen wird. Es genügt dann s der folgenden Gleichung

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[A(z) \cdot \frac{\partial s}{\partial z}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16),$$

wo $A(z)$ eine dem Diffusionskoeffizienten entsprechende Bedeutung hat, und hier als Größe des Austausches bezeichnet werden soll[2]). Sowohl aus Versuchen über die Strömung in Rohren wie auch aus meteorologischen Beobachtungen hat sich ergeben, daß $A(z)$ genügend genau durch $A(z) = a \cdot z^{6/7}$ dargestellt wird, wo für die Konstante a später ein numerischer Wert angegeben werden soll. Setzen wir für gesättigten Wasserdampf $s = 1$, so erfordert unsere Aufgabe die Bestimmung einer solchen Lösung $\sigma(z, t)$ von (16), daß:

$$\lim_{z \to \infty} \sigma(z, t) = \lim_{t \to +0} \sigma(z, t) = 0 ; \qquad \lim_{z \to +0} \sigma(z, t) = 1 .$$

[1]) Vergl. G. Doetsch, Die Integrodifferentialgleichungen von Faltungstypus, Math. Ann. 89. Bd. (1923), S. 192 bis 207. — V. Fock, Ueber eine Klasse von Integralgleichungen, Math. Zeitschr. 21. Bd. (1924), S. 161 bis 173 und die Bemerkung zu diesem Aufsatze von G. Doetsch, Math. Zeitschr. 24. Bd. (1926), S. 785 bis 788.

[2]) Ueber die physikalische Seite dieser Aufgabe und insbesondere wegen der Aufstellung der Gl. (16) verweise ich auf das in Fußnote 1, S. 470 genannte Buch von Herrn Prof. Dr. W. Schmidt, dem ich auch die Angaben dieses Beispieles verdanke.

Hierzu bringen wir zunächst durch Einführung der neuen Veränderlichen

$$z' = 7 \cdot z^{1/7}; \qquad t' = a \cdot 7^6 \cdot t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

die Gl. (16) in die Gestalt:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z'^2} - z'^6 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t'} = 0$$

und erhalten als Lösung unserer Randwertaufgabe wegen $f(t) = 1$ nach (14)

$$\overline{\sigma}(z', t') = \frac{z'}{\sqrt[4]{8} \cdot \Gamma(1/8)} \cdot \int_0^{t'} e^{-\frac{z'^8}{64(t'-\tau')}} \cdot (t'-\tau')^{-9/8} \cdot d\tau',$$

oder wenn wir $\tau' = t' \cdot \tau$ setzen und gemäß (17) wieder zu z und t zurückkehren:

$$\sigma(z, t) = \frac{z^{1/7} \cdot \sqrt[4]{7/8}}{(a\,t)^{1/8} \cdot \Gamma(1/8)} \cdot \int_0^1 e^{-\frac{49\, z^{8/7}}{64\, a\, t\,(1-\tau)}} \cdot \frac{d\tau}{(1-\tau)^{9/8}}.$$

Setzen wir hier noch

$$\frac{\sqrt[4]{7/8}}{a^{1/8} \cdot \Gamma(1/8)} = k \quad . \quad . \quad . \quad (18), \qquad \frac{49}{64\, a} = l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18'),$$

so ergibt sich die Darstellung

$$\sigma(z, t) = k \cdot z^{1/7} \cdot t^{-1/8} \int_0^1 e^{-\frac{l z^{8/7}}{t} \cdot \frac{1}{1-\tau}} \cdot (1-\tau)^{-9/8} \cdot d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19),$$

aus der man sofort erkennt, daß $\sigma(z,t)$ entlang der Kurven

$$t = \frac{l}{\lambda} \cdot z^{8/7} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

konstant bleibt, indem nämlich wird:

$$\sigma\left(z, \frac{l}{\lambda} \cdot z^{8/7}\right) = S(\lambda) = k \cdot \sqrt{\frac{l}{\lambda}} \cdot \int_0^1 e^{-\frac{\lambda}{1-\tau}} \cdot (1-\tau)^{-9/8}\, d\tau.$$

Da wegen (18) und (18') $k\, l^{-1/8} = \frac{1}{\Gamma(1/8)}$, so wird $S(\lambda)$ von a unabhängig, und wir haben

$$S(\lambda) = \frac{\sqrt[8]{\lambda}}{\Gamma(1/8)} \cdot \int_0^1 e^{-\frac{\lambda}{1-\tau}} \cdot (1-\tau)^{-9/8}\, d\tau.$$

Zur Auswertung dieses Integrales, das durch elementare Funktionen nicht darstellbar ist, empfiehlt es sich, durch die Substitution $v = \left(\frac{\lambda}{1-\tau}\right)^{1/8}$ den Parameter λ aus dem Integranden zu entfernen, so daß

$$S(\lambda) = \frac{8}{\Gamma(1/8)} \int_{\sqrt[8]{\lambda}}^{\infty} e^{-v^8} \cdot dv.$$

Um ferner die Integration über ein unendliches Gebiet zu vermeiden, setzen wir

$$\int_{\sqrt[8]{\lambda}}^{\infty} = \int_0^{\infty} - \int_0^{\sqrt[8]{\lambda}}$$

und erhalten dann wegen

$$\int_0^{\infty} e^{-v^8} \cdot dv = 1/8 \cdot \Gamma(1/8)$$

endlich die für die numerische Auswertung wohl zweckmäßigste Darstellung

$$S(\lambda) = 1 - \frac{8}{\Gamma(1/8)} \cdot \int_0^{\sqrt[8]{\lambda}} e^{-v^8} \cdot dv.$$

Da für $S(\lambda)$ eine Genauigkeit von 1 vT vollkommen hinreichend ist, so wird man sich für $\lambda \leq 1$ einer Reihenentwicklung bedienen; für $\lambda > 1$ dagegen ist es zweckmäßig, die Zerlegung $\int_0^{\sqrt[8]{\lambda}} = \int_0^1 + \int_1^{\sqrt[8]{\lambda}}$ vorzunehmen und das zweite Integral nach irgendeinem Verfahren der mechanischen Quadratur zu berechnen. Die folgende Zahlentafel gibt zu in Prozenten ausgedrückten Werten von $S(\lambda)$ die dazugehörigen Werte von λ:

$S(\lambda)$ in vH	1	2	3	4	5	6	7	8	9
λ	2,00	1,30	1,02	0,83	0,71	0,61	0,53	0,46	0,41
$S(\lambda)$ in vH	10	20	30	40	50	60	70	80	90
λ	0,356	0,115	0,037	0,0104	$24 \cdot 10^{-4}$	$41 \cdot 10^{-5}$	$41 \cdot 10^{-6}$	$16 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{-9}$

Aus meteorologischen Beobachtungen hat sich ferner ergeben, daß man bei mäßiger Windstärke $a = 0{,}0805$ setzen kann, wenn alle Größen in absoluten Einheiten gemessen werden. Es folgt dann wegen (18′) aus (20) als Gleichung für die Kurven, auf denen $S(\lambda)$ konstant ist: $\lambda \cdot t = 9{,}51 \cdot z^{8/7}$. Aus der obigen Zahlentafel für $S(\lambda)$ findet man nun leicht, daß etwa in $z = 1$ cm Höhe die Feuchtigkeit 10 vH, 50 vH, 90 vH nach bzw. rund 30^{sec}, 1^{h}, 50 Jahren anzutreffen sein wird.

Wenn auch das eben durchgeführte Beispiel in dieser Weise nie realisiert sein wird, so kann man doch die obigen Ergebnisse näherungsweise auf den Fall anwenden, daß eine in sich einheitliche Luftmasse zunächst über trockenen Untergrund strömt und von diesem dann auf eine Wasserfläche übertritt. Das zeitliche Aufeinander der früheren Aufgabe wird sodann von einem räumlichen Nebeneinander abgelöst. Allerdings gilt diese Lösung nur in genügender Entfernung von der Trennungslinie zwischen Land und Wasser, da man nur dort die in der Strömungsrichtung liegende Komponente des Austausches vernachlässigen darf. 792

Analyse aperiodischer trigonometrischer Reihen.[1]

Von **NIKOLAUS BERNSTEIN** in Moskau.

Wir wollen eine reelle trigonometrische Reihe

$$f(t) = \Sigma A \sin \frac{2\pi}{\tau}(t + \Theta)$$

als eine aperiodische Reihe bezeichnen 1., wenn die Perioden τ ihrer Glieder inkommensurabel sind (z. B. $\Sigma \sin \sqrt{n}\, t$), oder 2. wenn die Perioden der Partialsummen dieser Reihe in die Unendlichkeit streben [z. B. $\Sigma \sin {}^1/_n\, t$ oder $\Sigma \sin (1 - {}^1/_n)\, t$]. In der Praxis werden oft zu den aperiodischen Reihen auch diejenigen periodischen Summen gerechnet, deren Gesamtperiode endlich ist, jedoch zu groß, um in ihrer Gesamtheit übersehen werden zu können. Betrachten wir z. B. die Partialperioden der Lichtschwingungen des Eisenspektrums, die alle (im sichtbaren Gebiete des Spektrums) zwischen 14.10^{-16} und 25.10^{-16} Sek. enthalten sind, als kommensurabel (was keineswegs der Fall ist), so kann nichtsdestoweniger die Gesamtperiode dieses Spektralgebietes als 10^{1000} Jahre übertreffend geschätzt werden.

Es ist von Serg. Bernstein jun. bewiesen worden, daß eine konvergente aperiodische Reihe eine kontinuierliche analytische, in die Taylorsche Reihe einheitlich entwickelbare Funktion ist, wenn die Werte der Partialperioden von unten begrenzt sind. Nach seiner Bestimmung ist die Reihe

$$\Sigma (a_\mu \cos p_\mu x + b_\mu \sin p_\mu x)$$

eine »Spektralreihe«, wenn für jedes μ die Ungleichheit besteht

$$0 < p \leq M,$$

wo M eine Konstante ist.

[1] Vorgetragen am V. Physiker-Kongreß der U. d. S. S. R. in Moskau.

Das Problem der Analyse einer solchen Reihe muß, nach demselben Autor, zu einem differentiellen Prozeß führen, im Gegensatz zu den periodischen Reihen, deren Analyse, laut der Feststellung von Fourier, ein wesentlich integraler Prozeß ist.

Die experimentelle Praxis führt zur Notwendigkeit einer regulären Methode der Analyse von Spektralreihen und -summen in fast allen Gebieten der Naturwissenschaften. Wir begegnen den Summen vom Spektraltypus in der Seismologie, in der Maräographie, Astrophysik (z. B. die Periodizität der Sonnenflecke, die Wolffschen Zahlen, die Perioden der vielfachen Sterne usw.); noch mehr Beispiele gibt uns die Akustik und die Phonetik (Analyse der Klangfarben, der Vokale usw.), die Bewegungsphysiologie (Herzrhythmus, Gang- und Laufbewegungen, Flimmerbewegungen, Arbeitsprozesse), ferner die Bewegungspathologie (verschiedene Arten von Tremor, Elektrokardiogramme der Arythmieen usw.), Meteorologie, Elektrotechnik der Wechselströme; alle diese und viele andere Gebiete weisen jeden Tag Fragen auf, die nach der Fourierschen Methode unlösbar sind.

In dieser Abhandlung wollen wir eine Methode vorschlagen, die auf wesentlich physikalisch-mathematischen Eigenschaften der Schwingungsprozesse beruht, und eine systematische Analyse einer beliebigen empirischen Funktion von der Form

$$F(t) = V(t) + \Sigma A \sin \frac{2\pi}{\tau}(t + \Theta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gestattet, wo $V(t)$ eine wesentlich aperiodische (z. B. monotone) Funktion ist.

1. Trennung der Perioden. Das Problem der Analyse einer empirischen Funktion von der Form (1) besteht aus zwei Teilen: die Werte der Perioden τ der Komponenten müssen 1. bestimmt und 2. getrennt werden. Wir beginnen mit dem zweiten Teile des Gesamtproblems.

Nehmen wir an, daß uns die Werte der Perioden τ_i der Komponenten von (1) genau bekannt sind Es ist leicht zu zeigen, daß die Funktion

$$F_1(t) = F(t) + F\left(t + \frac{\tau_1}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

alle Perioden von $F(t)$ enthält, außer denjenigen, die in der Form $\frac{\tau_1}{2n+1}$ einbegriffen sind[1]) In derselben Weise kann man Funktionen

$$F_{1,2}(t) = F_1(t) + F_1\left(t + \frac{\tau_2}{2}\right); \qquad F_{1,2,3}(t) = F_{1,2}(t) + F_{1,2}\left(t + \frac{\tau_3}{2}\right) \text{ usw.} \quad (3)$$

erhalten, aus denen die Perioden τ_2, τ_3 usw. ausgeschlossen sind. Man sieht, daß die Indices 1, 2, 3 . . . einem kommutativen Gesetze folgen. Es ist ebenfalls ersichtlich, daß diese Trennungsmethode keinen Unterschied zwischen einer einfachen sinusoidalen Schwingung und einer Summe ungerader Obertöne macht.

In derselben Weise erhält man eine Trennung der Komponenten mittels der Funktionen

$$F^1(t) = F(t) - F(t + \tau_1); \qquad F^{1,2}(t) = F^1(t) - F^1(t + \tau_2) \text{ usw.} \quad . \quad . \quad (4),$$

die entsprechenderweise von den Perioden $\frac{\tau_1}{n}$ und $\frac{\tau_2}{n}$ frei sind. Hier werden also sämtliche Obertöne mit der Grundkomponente entfernt.

Nehmen wir nun für den Anfang an, daß $V(t) = A_0$ konstant ist, und daß die Zahl der Partialperioden endlich und gleich p ist. Nach der $(p-1)$-ten »Destillation« nach (3) erhalten wir den Rest von der Form

$$F_{1,2,3,\ldots p-1}(t) = A_0 \cdot 2^{p-1} + B_p \sin \frac{2\pi}{\tau_p}(t + \varphi_p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

wo der konstante Teil leicht isoliert werden kann. Die ursprünglichen Parameter der letzten gebliebenen Sinusoide, A_p und Θ_p, sind mit den erhaltenen Werten, B_p und φ_p, durch folgende Beziehungen verbunden:

$$\Theta_p = \varphi_p - \frac{\pi}{2\tau_p}\sum_{i=1}^{p-1}\tau_i, \qquad A_p = \frac{B_p}{2^{p-1}\prod_{i=1}^{p-1}\cos\frac{\pi\tau_i}{2\tau_p}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

[1]) In den physikalischen Schwingungsprozessen manifestiert sich eine solche Superposition in der Interferenzdämpfung.

Bei der Trennung nach (4) nehmen diese Beziehungen die Form

$$\Theta_p = \varphi_p' - \frac{\pi}{\tau_p}\sum_{i=1}^{p-1}\tau_i + \frac{\pi}{2}(p-1), \qquad A_p = \frac{B_p'}{2^{p-1}\prod_{i=1}^{p-1}\sin\frac{\pi\tau_i}{\tau_p}} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

an.

Der vorletzte Rest nach (3)

$$F_{1,2,3,\cdots p-2}(t) = A_0\cdot 2^{p-2} + C_{p-1}\sin\frac{2\pi}{\tau_{1-1}}(t+\psi_{p-1}) + C_p\sin\frac{2\pi}{\tau_p}(t+\psi_p) \quad (8)$$

enthält als Parameter der p-ten Sinusoide

$$\psi_p = \varphi_p - \frac{\pi}{2\tau_p}\tau_{p-1}, \qquad C_p = \frac{B_p}{2\cos\frac{\pi\tau_{p-1}}{2\tau_p}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

oder, für den Rest nach (4), d. h. für $F^{1,2,3,\cdots p-2}(t)$, entsprechenderweise

$$\psi_p' = \varphi_p' - \frac{\pi}{\tau_p}\tau_{p-1} + \frac{\pi}{2}, \qquad C_p' = \frac{B_p'}{2\sin\frac{\pi\tau_{p-1}}{\tau_p}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9\,\mathbf{a}),$$

woraus mittels (8) die ursprünglichen Werte von Θ_{p-1} und A_{p-1} bestimmbar sind. In derselben Weise verfolgt man die Trennung bis zur erstabgesonderten Komponenten.

Ist das aperiodische Glied, $V(t)$, selber eine Funktion von t, so wird die Frage der Komponententrennung etwas schwieriger. Nichtsdestoweniger kann dieses Glied aus den Gleichungen (5) und (8) bestimmt werden, wenn man die Parameter B_p, C_p, C_{p-1}, φ_p, ψ_p und ψ_{p-1} bereits gefunden hat.

Die Amplituden der sinusoidalen Komponenten können auch ihrerseits variabel sein. Betrachten wir hier den Spezialfall, wo die Amplituden in der allgemeinen Form $A_i e^{-\alpha_i t}$ darstellbar sind.

Sind die Werte der Dekremente α_i bekannt, so erhält man die folgerechte Separation nach den Formeln

$$F_1(t) = F(t) + e^{1/2\alpha_1\tau_1}F(t+\tau_1/2), \quad F^1(t) = F(t) - e^{\alpha_1\tau_1}F(t+\tau_1), \quad \text{usw.} \quad (10),$$

woraus die Beziehungen für die Bestimmung der ursprünglichen Amplituden

$$A_p = \frac{B_p}{2^{p-1}\,e^{1/2\sum_1^{p-1}\alpha_i\tau_i}\prod_1^{p-1}\cos\frac{\pi\tau_i}{2\tau_p}}, \quad A_p = \frac{B_p'}{2^{p-1}\,e^{\sum_1^{p-1}\alpha_i\tau_i}\prod_1^{p-1}\sin\frac{\pi\tau_i}{\tau_p}} \quad . \quad . \quad (11)$$

folgen. Die Phasen Θ sind auch hier aus (6) und (7) zu bestimmen. Sind die Werte von α_i unbekannt, so ist es stets bequem, eine Methode der sukzessiven Annäherungen zu gebrauchen. In der Tat, obgleich die Summe

$$f_i(t) = f(t) + f\left(t+\frac{\tau_i}{2}\right) = e^{-\alpha_i t}A_i\left[\sin\frac{2\pi}{\tau_i}(t+\Theta_i) + e^{-1/2\alpha_i\tau_i}\sin\frac{2\pi}{\tau_i}\left(t+\Theta_i+\frac{\tau_i}{2}\right)\right]\xi \quad (12)$$

nicht mehr gleich Null ist, wie es für die konstanten Amplituden der Fall wäre, jedoch bei einem nicht allzu großen Dekrement, d. h. in dem Falle, wenn sich der Exponent $-{}^1/_2\,\alpha_i\tau_i$ nur wenig von 0 unterscheidet, wird die Amplitude der Summe (12)

$$e^{-\alpha_i t}A_i(1 - e^{-1/2\alpha_i\tau_i})$$

klein im Verhältnis zu der ursprünglichen Amplitude derselben Komponenten, $e^{-\alpha_i t}A_i$, sein. Die »Destillation« wird jetzt nicht mehr imstande sein, die betreffende Komponente ganz und gar auszuscheiden; ihr Gehalt in der Gesamtsumme kann aber durch wiederholte Destillation beliebig klein gemacht werden. Befreien wir nun die zu untersuchende Summe von sämtlichen Komponenten außer einer einzigen, so unterscheidet sich ihre variable Amplitude von der ursprünglichen durch einen konstanten Faktor [siehe (11)]; mit anderen Worten wird der Wert des Dekrementes dieser Komponenten durch die von der Summe erlittenen wiederholten Destillationen nicht verändert und kann ohne weiteres aus der Abnahme der Amplitude des Restes bestimmt werden. Abb. 1 stellt eine sukzessive Separation dreier sehr stark gedämpfter Schwingungen dar, von denen eine jede ihren eigenen Wert des Dekrementes besitzt.

2. Bestimmung der Partialperioden.

Gehen wir nun zum ersten Teile des Gesamtproblems über, d. h. zur Bestimmung der Partialperioden. Für die folgende Demonstration ist es von Nutzen, ein analytisches Modell zu gebrauchen, das den physikalischen Prozeß der Resonanz nachahmt.

Stellen wir uns einen linearen Resonator vor, der nur rein geometrische Eigenschaften aufweist. Die Resonanz unserer Primärfunktion, $F(t)$, in einem solchen Resonator wird in einer Reihe Wiederspiegelungen von den Enden des Resonators und in einer Superposition der reflektierten Teile bestehen.

Da die Reflexion an den Resonatorenden entweder ohne Phasenwechsel oder mit einem solchen um die Größe $\tau_i/2$ stattfinden kann (was in der Schwingungsmechanik der Bauch- bzw. Knotenbildung am Resonatorende entspricht), so erhalten wir, für den allgemeinsten Fall von $2n-1$ aufeinanderfolgender Wiederspiegelungen in einem Resonator von der Länge $\tau/2$, eine folgende Superposition:

$$S_{\tau,2n}(t,\tau) = [\sum_1^n F(n\tau + t) - \sum_1^n F(n\tau - t)] + \sum_1^n F(n\tau \pm t) = 2\sum_1^n F(n\tau + t) \quad (13).$$

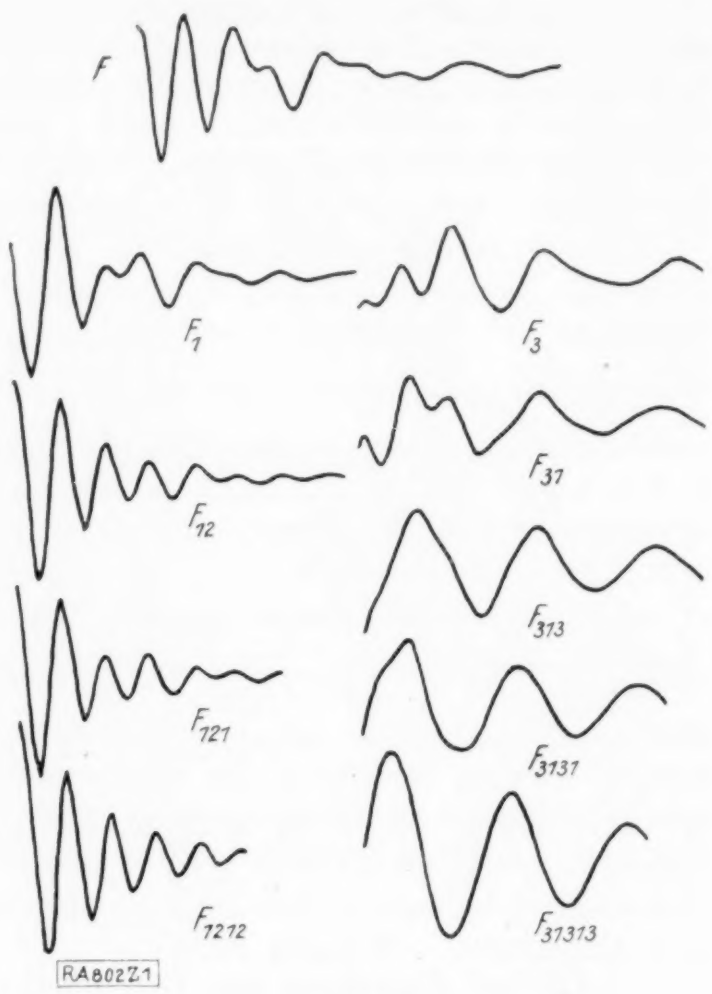


Abb. 1.

Für ein Glied der Funktion $F(t)$, welches die Periode τ_p besitzt, wird das Resultat der Superposition wie folgt sein:

$$S^{\tau_p}_{\tau,2n}(t,\tau) = 2\sum_{j=1}^n A_p \sin\frac{2\pi}{\tau_p}(t + \Theta_p + j\tau) \quad (14).$$

Es ist leicht zu ermitteln, daß die Amplitude der Funktion

$$\frac{1}{2n} S^{\tau_p}_{\tau,2n}(t,\tau) \quad (15)$$

zu Null strebt, wenn n ins Unendliche strebt, für alle Werte von τ, außer $\tau = N\tau_p$, wo N eine beliebige ganze Zahl ist. Für diese diskreten Werte von τ bleibt die Amplitude der Funktion (15) beständig gleich A_p. In der Tat, stellen wir die Funktion (15) als den reellen Teil der komplexen Form

$$-\frac{i}{n}\sum_{j=1}^n e^{\alpha_p + \frac{2\pi i}{\tau_p}(t+\Theta_p+j\tau)} = -\frac{i}{n} e^{\alpha_p + \frac{2\pi i}{\tau_p}(t+\Theta_p)} \sum_{j=1}^n e^{2\pi i \frac{j\tau}{\tau_p}} \quad (16),$$

dar, so finden wir, daß der erste Exponentialfaktor invariant in bezug auf τ ist. Der zweite Faktor

$$\sum_{j=1}^n e^{2\pi i \frac{j\tau}{\tau_p}} \quad (17),$$

geometrisch dargestellt, stellt die Diagonale eines regulären Polygons von $\frac{\tau_p}{\tau - \tau_p}$ Seiten dar, dessen Seite gleich 1 ist. Da der Zentralwinkel dieses Polygons gleich $2\pi\frac{\tau-\tau_p}{\tau_p}$ ist, so kann die Diagonale den Wert des Durchmessers des umschriebenen Kreises

$$\frac{1}{\sin\left(\pi\frac{\tau-\tau_p}{\tau_p}\right)},$$

der von n unabhängig ist, nicht übertreffen. Andererseits strebt der erste Faktor von (16) zu Null mit $1/n$, was zu beweisen war.

Das Quadrat des Moduls des Faktors (17), als eine Funktion von τ/τ_p dargestellt, bildet für verschiedene Werte von n eine Kurvenschar, die als Resonanzkurvenschar in der Schwingungsmechanik wohlbekannt ist (Abb. 2). Setzen wir noch hinzu, daß je nachdem n ins Unendliche strebt, die Funktion (13), als Funktion von t betrachtet, des Bestreben zur Periodizität mit der Periode τ zeigt.

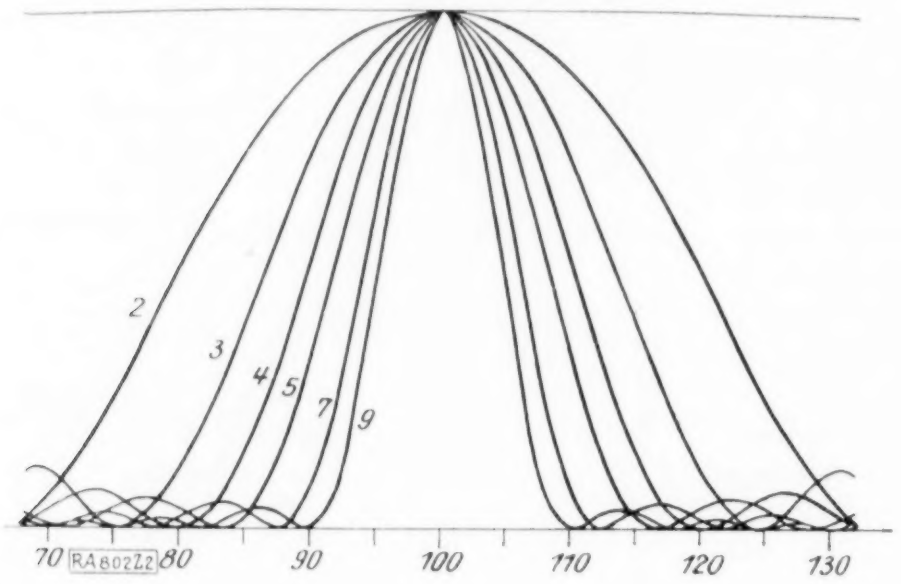


Abb. 2.

Gehen wir von der Resonanz einer Einzelschwingung wieder zur zusammengesetzten Funktion (1) über, so finden wir, daß die Quadrate der Summen (13) und (14) sich ganz ähnlich verhalten, d. h. daß die Summe

$$|1/n \sum_1^n F(n\tau + t)|^2 \quad (18),$$

ebenso wie die Summe

$$\left[\frac{1}{n} \sum_1^n A_p \sin \frac{2\pi}{\tau_p}(t + \Theta_p + n\tau)\right]^2$$

für alle Werte von τ zu Null strebt, außer denjenigen, die die Gleichung $\tau = N\tau_i$ befriedigen. [Im Falle von (13) wählen wir die Quadratform, da die Summierung der Schwingungsenergien sich als eine vektorielle Summierung verhält und von den Quadraten der Amplituden abhängig ist [1]).]

Da die Ableitung von (13) nach t

$$2 \frac{\partial}{\partial t} \sum_1^n F(n\tau + t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

die Schwingungsgeschwindigkeit darstellt, so ist es leicht zu zeigen, daß das Quadrat von (19) der vom Resonator absorbierten kinetischen Energie der zusammengesetzten Schwingung proportional ist. Der Maximalwert dieses Quadrates stellt also den Gesamtbetrag der von den Resonator absorbierten Schwingungsenergie dar. Strebt n ins Unendliche, so strebt dieses Maximum für die Fälle $\tau = N\tau_i$ zu $(A_i/\tau_i)^2$; für alle übrigen Werte von τ strebt er, wie die früheren Funktionen, zu Null.

Wir nennen die Funktion

$$\Phi(\tau) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \max \left[\frac{\partial}{\partial t} \sum_1^n F(n\tau + t) \right] \right\}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

die Spektralfunktion von $F(t)$. Ebenso wie die Funktion (18) ist sie gleich Null für alle Werte von τ, ausgenommen diejenigen, die die Gleichung $\tau - N\tau_i = 0$ befriedigen, wo τ_i die Partialperioden von $F(t)$ sind. Für die Wurzeln dieser Gleichung nimmt sie die Werte $(A_i/\tau_i)^2$ an.

Ist n eine endliche Zahl, wird die Funktion $\Phi_n(\tau)$ zu einer kontinuierlichen analytischen Funktion, deren Maxima den Partialperioden von $F(t)$ und ihren Vielfachen entsprechen. Wie man aus der Abb. 2 ersieht, besitzt $\Phi_n(\tau)$ noch mehrere andere kleine Maxima, die von τ/τ_i abhängen und mit wachsendem n rasch zu Null streben. In dieser Form kann die Funktion $\Phi_n(\tau)$ zum Auffinden der Perioden einer empirischen Funktion $F(t)$ angewandt werden.

Man bildet die Funktion (13) für irgend einen Wert von τ, auf einem Intervalle der Länge $\geqq \tau$. Mit anderen Worten, wird der ganze gegebene Teil der Funktion $F(t)$ in gleiche Abschnitte von der Länge τ geteilt, worauf diese Abschnitte summiert werden. Danach bestimmt man den Maximalwert der Ableitung dieser Summe im Bereiche des Intervalles τ, man dividiert diesen Wert durch n und findet das Quadrat des Resultats. Die auf diese Weise für verschiedene τ erhaltenen Werte stellen die Ordinaten der angenäherten Spektralfunktion $\Phi_n(\tau)$ dar. In empirischen Fällen genügt es vollkommen, statt der Ableitung den Maximalwert des Differenz-Quotienten anzuwenden.

Bei einem solchen Aufbau der Werte der Funktion $\Phi_n(\tau)$ für verschiedene uns interessierende Werte von τ erhalten wir allmählich eine Kurve, deren Maxima den in der zu untersuchenden Funktion $F(t)$ enhaltenen Perioden und ihren Vielfachen entsprechen,

[1]) Dasselbe gilt selbstverständlich auch für die Quadrate der Summen der Ableitungen.

wobei die Werte der Funktion Φ_n mit zunehmendem n zur Proportionalität mit den Quadraten entsprechender Amplituden anstreben (wenn aber das Maximum irgend einer Grundschwingung mit ihren Obertönen entspricht, so streben die erwähnten Werte zur Proportionalität mit den Summen der Quadrate entsprechender Amplituden). Dieser letzte Umstand gibt uns die Möglichkeit, das Maximum auf τ, das durch ein Vielfaches irgend einer kleineren Periode τ/N bedingt ist, von einem solchen durch die Schwingung der Periode τ hervorgerufenen zu unterscheiden, d. h. den Grundton von seinen Obertönen zu differenzieren.

Je größer der Wert von n ist, um so steiler steigt und fällt die Kurve $\Phi_n(\tau)$ neben den Maximalwerten $\Phi_n(N\tau_i)$. Man kann annehmen, daß die Funktion $\Phi_n(\tau)$ in einem Abstand $\pm\frac{\tau_i}{n}$ vom i-ten Maximum gleich null wird. Es ist daher notwendig, den Bereich von kürzesten Perioden der zu untersuchenden Funktion besonders genau nachzuprüfen, da bei einer gegebenen Abschnittlänge der zu untersuchenden Kurve die Werte von n für kleinere Perioden am größten sind und damit die Gefahr entsteht, einen sehr schmalen Aufschwung der Spektralkurve $\Phi_n(\tau)$ zu übersehen.

Es folgt unmittelbar aus (16), daß für eine Trennung zweier Nachbarperioden τ_1 und τ_2 das zu untersuchende Intervall der Funktion $F(t) \geqq \left|\frac{\tau_1\,\tau_2}{\tau_1-\tau_2}\right|$ sein muß, d. h. wenigstens der Gesamtperiode beider isoliert-angenommener Komponenten gleichen muß.

Es kann vorkommen, daß irgend eine Komponente mit kleinerer Amplitude kein ersichtliches Maximum zeigen wird, da das letztere durch eine naheliegende stärkere Komponente in den Hintergrund gestellt wird. Deshalb ist es empfehlenswert, die einmal aufgefundenen Perioden sofort zu destillieren, um den Rest einer weiteren ungestörten Analyse unterwerfen zu können. Zu demselben Zwecke ist es zumal vorteilhaft, die gegebene Funktion durch eine willkürliche Periode zu destillieren, um die Komponentenamplituden zugunsten der schwächeren zu ändern.

Die Abb. 3 stellt eine komplette Trennung einer Summe von vier Schwingungen dar. Die am schwächsten ausgesprochene Komponente $f_4(t)$, deren Periode $3\tau_1$ und $2\tau_2$ sehr nahe liegt, manifestiert sich erst klar (mit einer durch die Destillation bedeutend vergrößerten Amplitude) im Reste $F_{1,2,3}(t)$.

Wir führen noch eine beispielsweise Trennung einer empirischen Schwingungskurve (Abb. 4) an, die uns von Hrn. W. S. Kasanski, Leiter des akustischen Laboratoriums des Staatsinstitutes der experimentellen Elektrotechnik in Moskau, liebenswürdig überlassen worden ist. Diese Kurve ist ein Oszillogramm eines Harmonium-Zusammenklanges, das mittels eines von H. Kasanski konstruierten Oszillographs aufgenommen worden ist. Das Spektrum dieser Kurve deutet drei harmonische Gruppen mit ihren teils zusammenfallenden Obertönen deutlich an. Die Grundperioden der drei Gruppen (die in der Abb. 4 durch die Buchstaben E, A, K bezeichnet sind) verhalten sich, in den Grenzen der Ungenauigkeit der Instrumentstimmung, wie der 1-te, 5-te und 6-te harmonische Ton, wobei der allerniedrigste Ton

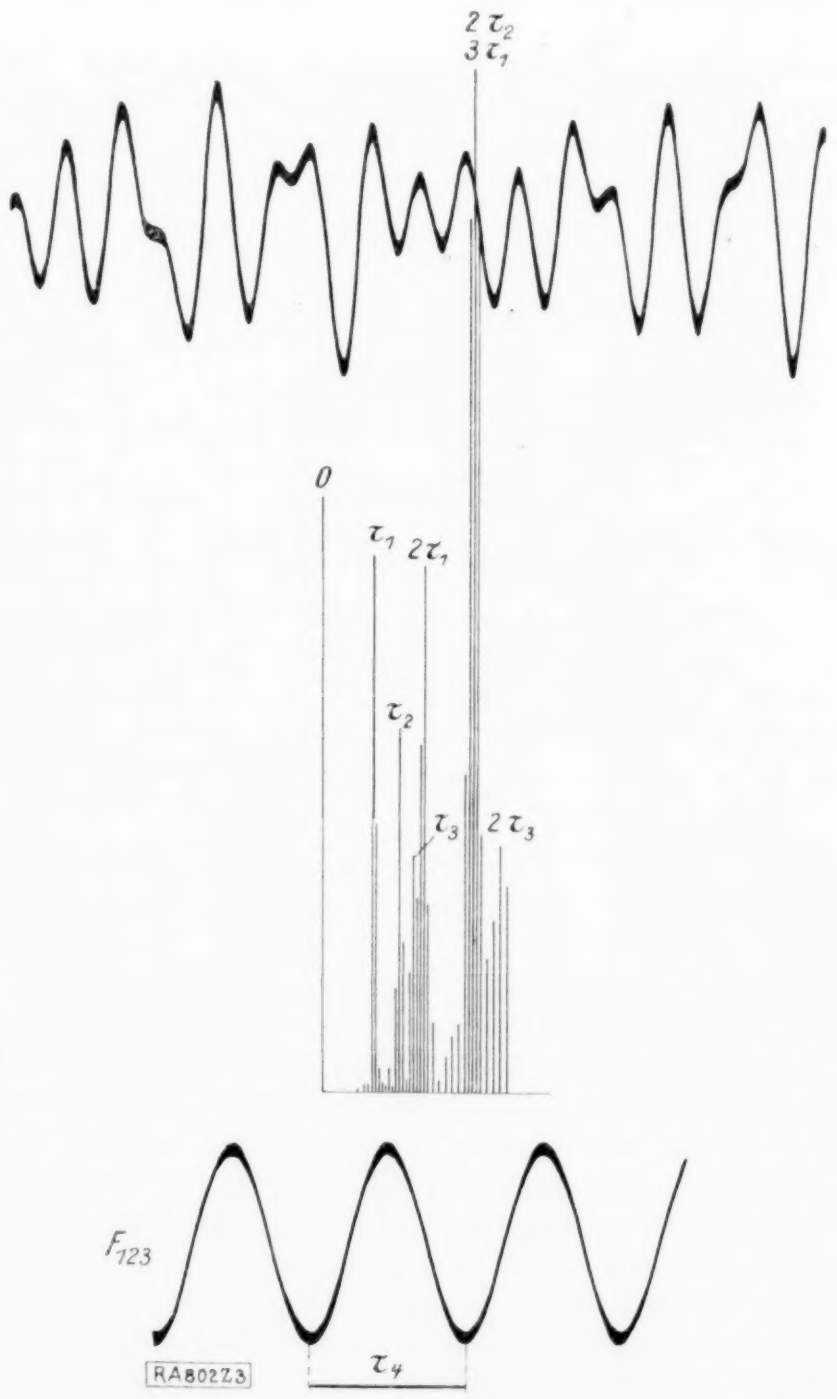


Abb. 3.

Zahlen

Schema der Destillations-Analyse einer

Die auszuscheidende Komponente	1	2	3
Das Destillat [Formeln (2), (4), (21)]	$F^{1/2,\ 1/3,\ 1/5,\ 1/7}$	$F_1^{1/3,\ 1/4}$	$F_{1/3\times 3}^{1/2,\ 1/9}$
Eine mögliche Beimischung der höheren Komponenten beginnt mit der Komponenten-Nr. .	11	10	15
Berichtigungskoeffizient zur Amplitude, k; $A_p = k \cdot B_p$ [nach den Formeln (6) und (7)] . .	0,282985	$-0{,}144338 = -\frac{1}{8}\operatorname{cosc}\frac{\pi}{3}$	$-0{,}096225 = -\frac{1}{12}\operatorname{cosc}\frac{\pi}{3}$
Berichtigung zur Phase, γ; $(\Theta_p = \gamma + q_p)$ . .	$148^0\,17'\,12''$	-105^0	-50^0

merklich tiefer, der oberste dagegen etwas höher ist, als es den Forderungen der strengen Harmonie entspricht. Interessanter ist, daß die harmonischen Obertöne aller drei Harmoniumzungen ohne Ausnahme disharmonisch sind; diese Disharmonie übertrifft ganz bedeutend die Größen der wahrscheinlichen Meßfehler. Einige dieser Obertöne manifestieren sich zum ersten Mal sogar ohne eine wiederholte Spektroskopie während der folgerechten systematischen Destillation.

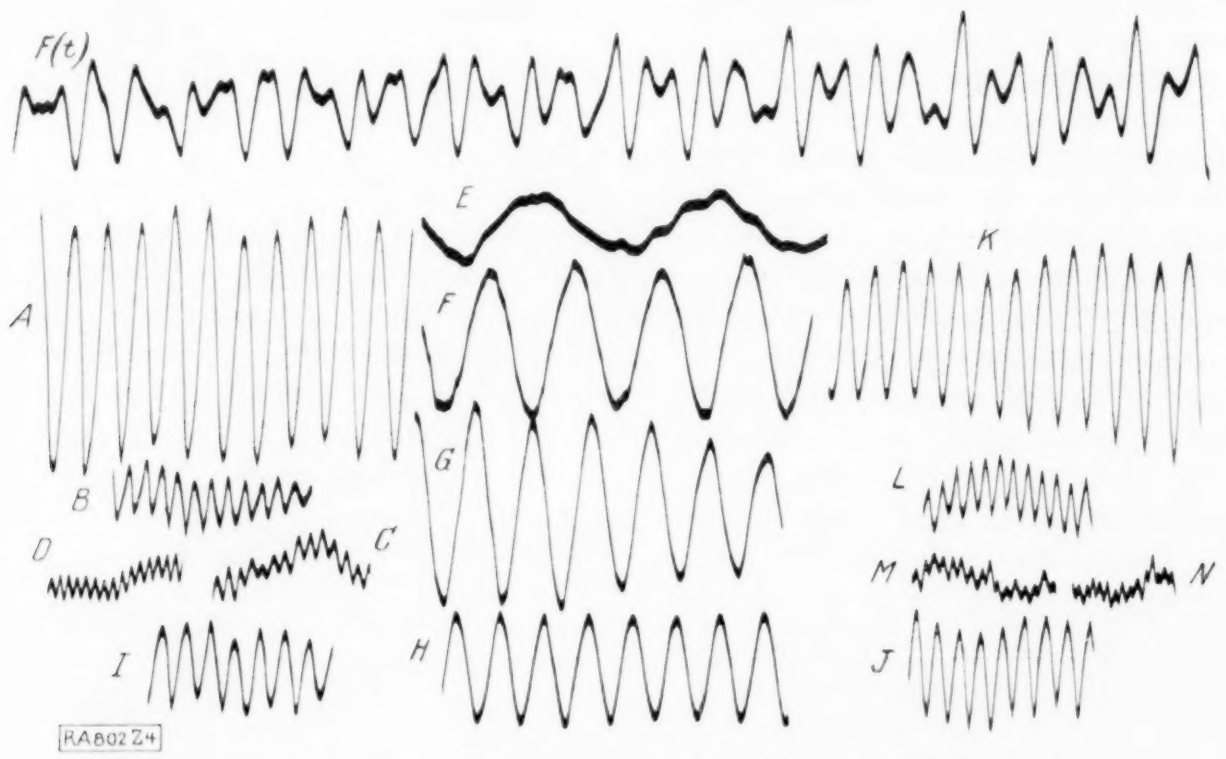


Abb. 4. Analyse eines Oszillogramms eines Harmonium-Dreiklanges (von Hrn. W. S. Kasanski aufgenommen).

(Vergl. hierzu die nebenstehende Uebersicht: Werte der Perioden und der Amplituden in mm der Originalkurve.)

3. Zusätze. Zum Schluß möchte ich noch einige Einzelerläuterungen beifügen. Es folgt unmittelbar aus dem Wesen des »Destillations« Prozesses, daß er weder neue, fremde Periodizitäten in die ursprüngliche Funktion einführt, noch die in ihr enthaltenen irgendwie zu verändern imstande ist. Daraus folgen einige praktische Bemerkungen.

In der Praxis ist es immer schwer aus der Spektralkurve $\Phi_n(\tau)$ die Werte der Perioden mit großer Genauigkeit zu bestimmen. Sind aber die vorhandenen Perioden mittels der Spektralfunktion ungefähr bestimmt, so kann man durch folgerechte Destillationen eine Periode nach der anderen soweit von den Nachbarperioden freimachen, daß eine beliebig genaue Ermittelung der exakten Werte durch eine direkte Messung der Destillate ermöglicht wird. In dieser Weise sind einzelne Perioden des Oszillogramms Abb. 4 separiert und gemessen worden; die etwas schwankenden Konturen dieser Destillate gehen aus der unvollkommenen (durch ungefähre Periodenwerte stattgefundenen) Separation

tafel 1.

periodischen Funktion von der Periode 1 (= 360°).

4	5	6	7	8	. . . . .
$F^{1/3,\ 1/8}_{1,\ 1/2}$	$F^{1/2,\ 1/3}_{1/5\times 5}$	$F^{1/4,\ 1/9}_{1/3\times 3,\ 1/3}$	$F^{1/2,\ 1/3}_{1/7\times 7}$	$F^{1/3,\ 1/16}_{1,\ 1/2,\ 1/4}$	. . . . .
20	25	30	35	40	. . . . .
0,072169 $= \frac{1}{16}\ \mathrm{cosc}\ \frac{\pi}{3}$	− 0,057735 $= -\frac{1}{20}\ \mathrm{cosc}\ \frac{\pi}{3}$	0,048112 $= \frac{1}{24}\ \mathrm{cosc}\ \frac{\pi}{3}$	− 0,041239 $= -\frac{1}{28}\ \mathrm{cosc}\ \frac{\pi}{3}$	− 0,036084 $= -\frac{1}{32}\ \mathrm{cosc}\ \frac{\pi}{3}$	. . . . .
− 172° 30′	− 114°	− 125°	− 124° 17′ 09″	− 206° 15′	. . . . .

hervor. Diese Schwankungen sind die noch übriggebliebenen Reste der nicht völlig entfernten Glieder, und man sieht, daß sie keineswegs stören, die Perioden mit großer Genauigkeit zu bestimmen. In dem Oszillogramm Abb. 4 haben wir eine Genauigkeit von 0,005 mm der Originalkurve in der Periodenmessung erreicht.

Mittels eines sachgemäßen Gebrauchs ist die beschriebene Methode imstande, sehr komplizierte und mannigfaltige Aufgaben aus dem Bereiche der Analyse der trigonometrischen Summen zu lösen, und weist dabei eine sehr große Biegsamkeit und Anpassungsfähigkeit auf.

Da übrigens die Anwendbarkeit der Destillation keineswegs von dem Umstand abhängt, ob die Perioden kommensurabel oder inkommensurabel sind, und da das Problem der Periodenbestimmung im Falle einer periodischen Kurve ausfällt, so kann die beschriebene Destillationsmethode die Fouriersche Methode vollkommen und in allen Fällen

Werte der Perioden und der Amplituden in mm der Originalkurve.

Taste	Harmonischer Ton Nr.	Periodenlänge mm	Amplitude (ursprünglich) mm	Destillat (Perioden der Destillation in Sechstel-Millimeter)	Bezeichnung auf der Abbildung
I	1	2,000	1,06	$F^{20,\ 30,\ 43}$	A
	2	0,980	0,05	$0{,}4\ F^{20,\ 15,\ 43}_{12,\ 12\times 5}$	B
	3	0,680	0,05	$0{,}4\ F^{30}_{8\times 3,\ 8\times 5}$	C
	4	0,518	0,07	$0{,}2\ F^{15,\ 17}_{10,\ 12,\ 20,\ 30,\ 6\times 5}$	D
II	1	10,167	0,12	$0{,}1\ F^{20,\ 24,\ 17,\ 15}_{30,\ 2\times 15}$	E
	2	4,965	0,47	$0{,}4\ F^{10,\ 12,\ 15,\ 20,\ 43}$	F
	3	3,405	0,50	$0{,}4\ F^{10,\ 12,\ 15,\ 30,\ 17}$	G
	4	2,542	2,31	$0{,}2\ F^{20,\ 24,\ 7^1/_2}_{30}$	H
	7	1,434	0,59	$0{,}4\ F^{20,\ 24,\ 15}_{30,\ 15}$	I
	8	1,260	0,92	$0{,}2\ F^{20,\ 24,\ 17}_{30,\ 15}$	J
III	1	1,650	0,57	$0{,}4\ F^{24,\ 43}_{20,\ 20\times 3}$	K
	2	0,833	0,13	$0{,}4\ F^{24,\ 43}_{20,\ 20\times 3,\ 10}$	L
	3	0,535	0,05	$0{,}4\ F^{24,\ 43}_{20,\ 20\times 3,\ 10,\ 6^2/_3\times 3}$	M
	4	0,414	0,01	$0{,}2\ F^{24,\ 43}_{20,\ 20\times 3,\ 10,\ 5}$	N

Anmerkung: Die Sinusoide *E* ist sehr unrein und schwer zu isolieren wegen ihrer sehr geringen Amplitude; der 5-te und der 6-te Partialton der Taste II können überhaupt nicht isoliert werden, da sie mit den Tonhöhen *A* bzw. *K* beinahe zusammenfallen.

ersetzen, wobei sie mit Genauigkeit alle kleinsten Abweichungen der Partialperioden von den strengen Werten τ/N aufweist, was bei der praktischen Anwendung der Fourierschen Analyse stets weggelassen werden muß.

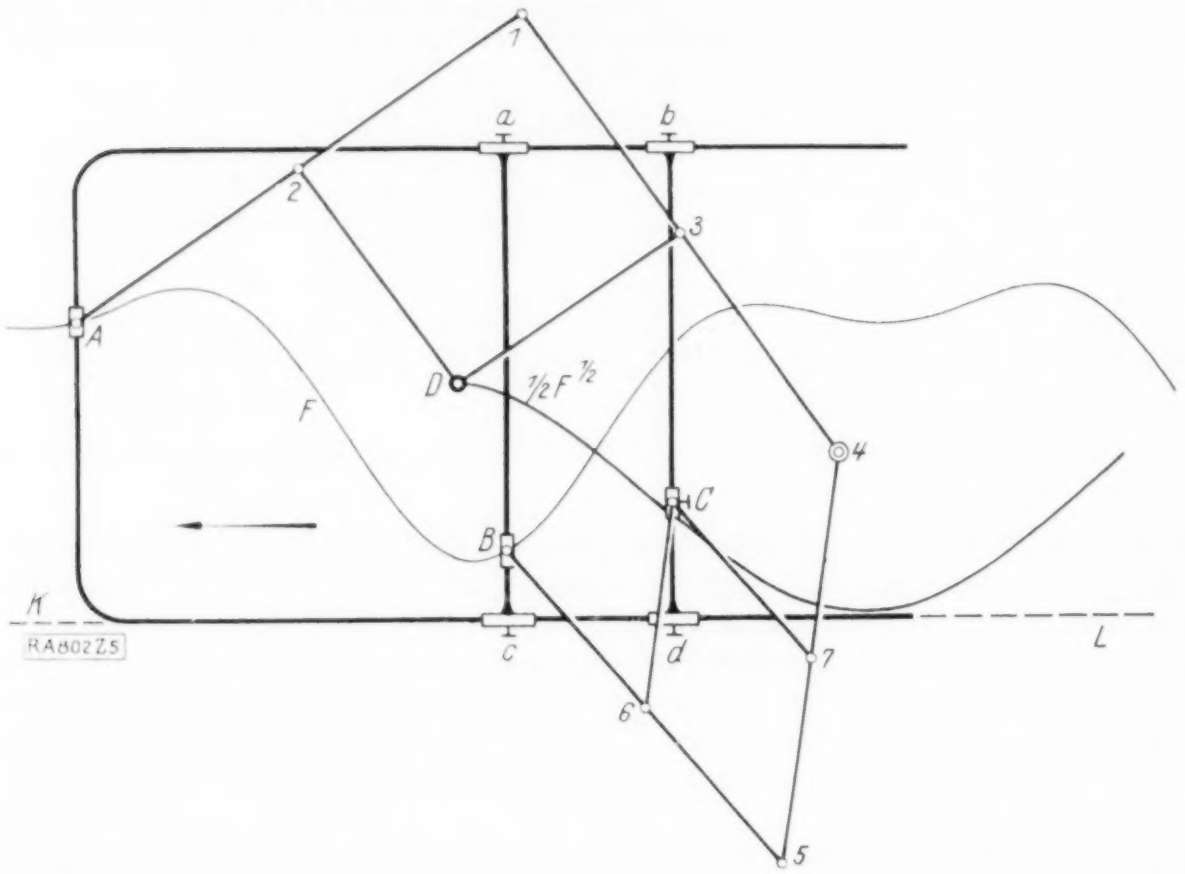


Abb. 5. Schema eines harmonischen Analysators nach der Destillationsmethode. Der gabelförmige Rahmen $bacd$ wird längs des Lineals KL verschoben, wobei zwei Zeiger, A und B, die längs der senkrechten Stangen A und ac gleiten können, dem Verlauf der zu untersuchenden Kurve F folgen. Die Stangen ac und bd sind verschiebbar und werden in ihren Lagen mittels Feststellschrauben befestigt. Der Schieber C wird ebenso mittels einer Feststellschraube fixiert. Ist nun die Entfernung zwischen den Stangen A und ac gleich τ gesetzt, so zeichnet der Stift D die Kurve $^1/_2F^\tau$. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 — Scharniere.

Da das Summieren immer durch das Bestimmen der Halbsummen ersetzt werden kann, so kann ein gewöhnlicher, etwa entsprechend der Abb. 5 veränderter Pantograph als ein harmonischer Analysator für nicht besonders komplizierte periodische Summen angewandt werden. Sind in der Summe eine Reihe mehr oder weniger genau vielfacher Perioden enthalten, so ist es immer leicht, die kleineren von ihnen auszuscheiden, um die größeren hervorzuheben. Es ist etwas schwieriger, sich von den größeren Perioden zu befreien. Eine passende Kombination der Formeln (3) und (4) hilft die ungeraden Obertöne von den geraden zu sondern. Will man z. B. die Periode $\frac{\tau_i}{2n}$ von der Periode $\frac{\tau_i}{2m+1}$ befreien, so bildet man die Funktion

$$F_{\tau_i}(t) = F(t) + F\left(t + \frac{\tau_i}{2}\right),$$

die die ungerade Partialperiode sofort verschwinden läßt. Hat man die ungerade Komponente $\frac{\tau_i}{2m+1}$ von der Grundschwingung τ_i freizumachen, so bildet man die Summe

$$F_{\tau_i \times (2m+1)}(t) = \sum_{n=0}^{n=2m} F\left(t + \frac{n\tau_i}{2m+1}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21),$$

in der die Komponente τ_i null wird (in derselben Weise, wie der rückkehrende Dreiphasenstrom ($m = 1$) konstant null ist).

Zur Analyse der periodischen Gesamtheit ist folgendes Destillationsverfahren (in den Grenzen der ersten 8 Komponenten) zweckmäßig und hinreichend [vergl. Zahlentafel 1 auf S. 482/483].

Es wäre überflüssig, alle denkbaren Situationen und Vereinfachungen aufzuzählen; daher begnügen wir uns mit dem Gesagten [1]).

[1]) Es wäre Unrecht, noch eine bemerkenswerte Besonderheit der Destillation periodischer Gesamtheiten mit Schweigen zu umgehen. Aus der vorliegenden Zahlentafel folgt unmittelbar, daß für eine beliebige periodische Funktion die Gleichheit

$$\lim F^{n_2, n_3, n_5, n_7, \ldots, n} \cdots (t) = A \sin \frac{2\pi}{\tau}(t + \Theta)$$

besteht, wo τ die Periode der Funktion $F(t)$ ist, A und Θ Konstanten, $n_2, n_3 \ldots$ beliebige Zahlen sind und E alle aufeinanderfolgende einfache Zahlen sind, — eine Gleichheit, die auf eine sehr interessante Abhängigkeit der Kreisfunktion von der Reihe einfacher Zahlen hinweist.

Es ist endlich zu betonen, daß die Variabilität der Amplituden keineswegs auf das spektrologische Resultat störend einwirkt, falls die Variation ohne Zeichenänderung stattfindet. Dieser Umstand gibt die Möglichkeit der Analyse eigenartiger, fast-periodischer Funktionen von der Form

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin \frac{2\pi n}{\tau}(t + \Theta_n),$$

die anscheinend einen bedeutenden Anteil an der Bildung der Stimmlaute nehmen. Der oben untersuchte Fall der Exponentialkoeffizenten schädigt deshalb den analytischen Erfolg nicht. Es kann aber von Nutzen sein, falls die Dämpfung zu groß ist, sie etwas zu schwächen, was durch eine Multiplikation von $F(t)$ mit $e^{\beta t}$ mit passend gewähltem β leicht zu erreichen ist. 802

Vierskalige Nomogramme.

Von **C. v. DOBBELER** in Karlsruhe.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, zu untersuchen, wie man in einfacher Weise durch ein Nomogramm vier veränderliche Größen so darstellen kann, daß mit einer einzigsten Einstellung des Schnittelementes jeweils gleichzeitig die vier Veränderlichen an den vier Skalen abgelesen werden können. Zwar können auch die bekannten Fluchtlinientafeln für vier Veränderliche ausgebildet werden, aber dann ist der Umweg über eine Zapfenlinie nötig. Ebenso ermöglichen die sog. Rechteck- oder Kreuztafeln das Rechnen mit vier Veränderlichen aber auch nur mit zwei aufeinander folgenden Einstellungen oder durch Zuhilfenahme eines besonderen Apparates (z. B. jener von Gütschow). Bei den im folgenden beschriebenen Tafeln wird ein rechter Winkel als Schnittelement benutzt. An sich ist die Anwendung eines solchen Winkels keinewegs grundsätzlich neu; z. B hat Soreau (Nomographie ou traité des abaques) auf dem Wege über eine viergliedrige Determinante eine prinzipielle Lösung für diese Art von Tafeln gegeben. Aber gleichwohl sind solche Tafeln kaum jemals praktisch angewendet worden, trotzdem man sagen möchte, daß sie beinahe einfacher aufzustellen und übersichtlicher anzuwenden sind, als die üblichen Fluchtlinientafeln, und zwar nicht nur deshalb, weil man eine Veränderliche mehr erhält, sondern auch deshalb, weil man vielfach ohne die logarithmische Umformung auskommt, also viel häufiger lineare Teilungen erhält.

1. Aufstellung der allgemeinen Schlüsselgleichung. Wenn man die bekannten Leitertafeln mit drei Funktionsleitern durch Hinzufügung einer vierten Leiter erweitern will, so muß man statt der einen Schnittgeraden deren zwei wählen; wenn man weiterhin die vier Schnittpunkte auf den vier Skalen gleichzeitig ablesen will, so dürfen die beiden Schnittgeraden nicht gegeneinander beweglich sein, sondern müssen einen konstanten Winkel miteinander bilden. Daraus folgt die zunächst zu beantwortende Frage: »Welche Beziehungen bestehen zwischen den vier Punkten, in denen vier beliebige Skalen von zwei einen beliebigen, aber konstanten Winkel bildende Geraden geschnitten werden.« Die Lösung dieser Frage wird die allgemeine Schlüsselgleichung für den vorliegenden Fall ergeben.

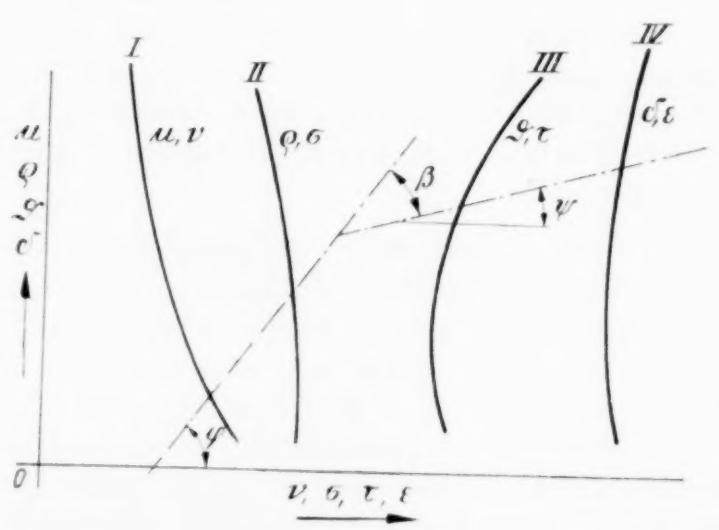


Abb. 1.

Abb. 1 zeigt die vier Skalen I, II, III und IV und die beiden Schnittgeraden. Von den beiden Schnittgeraden soll die linke stets nur die beiden Skalen I und II, die rechte dagegen nur die beiden Skalen III und IV schneiden; ferner bilden die beiden Schnittgeraden stets den konstanten Winkel β miteinander. Im übrigen ist ihre Lage vollkommen beliebig, die Winkel φ und ψ sind also veränderlich; q ist der Winkel zwischen der linken Schnittgeraden und der Richtung der Abszissenachse, ψ ist der Winkel zwischen der rechten Schnittgeraden und der Richtung der Abszissenachse. Wie leicht ersichtlich, muß $q = \psi + \beta$ sein.

Die vier Schnittpunkte auf den vier Skalen haben die Abszissen ν, σ, τ und ε, sowie die Ordinaten μ, ϱ, ϑ und δ. Dann muß sein:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varrho - \mu}{\sigma - \nu}, \qquad \operatorname{tg} \psi = \frac{\delta - \vartheta}{\varepsilon - \tau}.$$

Da nun

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\psi + \beta) = \frac{1}{\cot (\psi + \beta)} = \frac{\cot \psi + \cot \beta}{\cot \psi \cdot \cot \beta - 1}$$

ist, so folgt:

$$\frac{\varrho - \mu}{\sigma - \nu} = \frac{\dfrac{\varepsilon - \tau}{\delta - \vartheta} + \cot \beta}{\dfrac{\varepsilon - \tau}{\delta - \vartheta} \cdot \cot \beta - 1}$$

oder nach einer kleinen Umformung

$$\frac{\mu - \varrho}{\nu - \sigma} = \frac{\tau - \varepsilon + (\vartheta - \delta) \cdot \cot \beta}{-\vartheta + \delta + (\tau - \varepsilon) \cdot \cot \beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Da die vier Punkte auf den vier Kurven liegen sollen, so müssen ihre Koordinaten auch gleichzeitig die Koordinaten der Kurven sein. Die vier Kurven seien in Parameterform gegeben, und zwar sei für I der Parameter x, für II sei er y, für III sei er z und für IV sei er v. Dann ist also:

für Skala I	für Skala II	für Skala III	für Skala IV	
$\mu = f_1(x)$	$\varrho = f_2(y)$	$\vartheta = f_3(z)$	$\delta = f_4(v)$	}
$\nu = F_1(x)$	$\sigma = F_2(y)$	$\tau = F_3(z)$	$\varepsilon = F_4(v)$	} . . (2).

Jedem Werte x entspricht nur stets ein einzigster Kurvenpunkt der Kurve I, schreibt man also alle Zahlenwerte für x an die zugehörigen Punkte der Kurve I, so erhält man eine Funktionsskala; das gleiche gilt für die anderen Kurven. Setzt man nunmehr die Gl. (2) in die Gl. (1) ein, und setzt ferner noch, da der Winkel β ja nach Voraussetzung konstant sein soll, $\cot \beta = \varkappa$, so ergibt sich:

$$\frac{f_1(x) - f_2(y)}{F_1(x) - F_2(y)} = \frac{F_3(z) - F_4(v) + \varkappa [f_3(z) - f_4(v)]}{-f_3(z) + f_4(v) + \varkappa [F_3(z) - F_4(v)]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Jede Gleichung, die sich auf die Form der Gl. (3) bringen läßt, läßt sich also durch ein Nomogramm mit vier Kurvenskalen und zwei einen konstanten Winkel bildenden Schnittgeraden darstellen. Die vier Kurvenskalen können mit Hilfe der Gl. (2) berechnet werden.

Wählt man für den Winkel β einen Winkel von 90^0, so kann die Ablesung von vier zusammengehörigen Werten x, y, z und v mittels eines rechtwinkligen Zeichendreiecks erfolgen. Für $\beta = 90^0$ wird: $\varkappa = \cot \beta = 0$. Dadurch vereinfachen sich die Gl. (1) und (3) wie folgt:

$$\frac{\mu - \varrho}{\nu - \sigma} = \frac{\tau - \varepsilon}{-\vartheta + \delta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

und

$$\frac{f_1(x) - f_2(y)}{F_1(x) - F_2(y)} = \frac{F_3(z) - F_4(v)}{-f_3(z) + f_4(v)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Von diesen beiden Gleichungen, deren Aufbau leicht zu übersehen ist, soll im folgenden stets ausgegangen werden, es soll also immer vorausgesetzt werden, daß die beiden Schnittgeraden aufeinander senkrecht stehen; denn ein rechtwinkliges Dreieck oder auch ein rechtwinklig zugeschnittenes Blatt Papier wird ja immer für die Ablesung zur Verfügung stehen.

2. Vergleich mit dreiskaligen Nomogrammen. Gl. (5) gibt ein bequemes Hilfsmittel zum Vergleich zwischen der beschriebenen Nomogrammart und den üblichen Nomogrammen mit drei Skalen und einer Schnittgeraden. Die letzteren Nomogramme sollen im folgenden stets als »dreiskalige« Nomogramme bezeichnet werden. Der Ausdruck ist lediglich der Kürze halber gewählt worden; er ist vielleicht nicht ganz treffend, denn die eben als »dreiskalig« bezeichneten Nomogramme können ja, wenn man eine »Zapfenlinie« zu Hilfe nimmt, auch mehr als drei Skalen erhalten. Aber die Ablesung erfolgt dann nicht mehr unmittelbar, sondern mittelbar, eben über die Zapfenlinie; solche Nomogramme sind also eigentlich nur zusammengesetzte »dreiskalige« Nomogramme.

Wenn man für die »dreiskaligen« Nomogramme eine der Gl. (5) analoge Gleichung ableiten würde [1]), so lautet diese:

$$\frac{f_1(x) - f_2(y)}{F_1(x) - F_2(y)} = \frac{f_2(y) - f_3(z)}{F_2(y) - F_3(z)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

[1]) Vergl. z. B. Maschinenbau 1923, S. 103.

Gl. (5) und (6) sind leicht miteinander zu vergleichen. Gl. (6) enthält natürlich nur drei Veränderliche, während Gl. (5) deren vier enthält. In Gl. (5) stehen aber auf der rechten Seite zwei Veränderliche und auf der linken Seite die beiden anderen: dagegen kommt in Gl. (6) die Veränderliche y auf beiden Seiten vor. Dadurch ist die Auflösung von (6) und damit auch ihre praktische Anwendung ungleich schwieriger als jene der Gl. (5), trotzdem letztere eine Veränderliche mehr enthält. Am deutlichsten erkennt man das dann, wenn man zum Vergleich die Gl. (5) auf drei Veränderliche reduzieren würde, indem man z. B. $v = o$ setzt. Die Trennung der Veränderlichen in Gl. (5) hat den weiteren Vorteil, daß man auf einer Seite unabhängig von der anderen Seite Zähler und Nenner mit einem beliebigen konstanten Faktor multiplizieren kann, d. h. man kann zwei Veränderliche in beliebig vergrößertem Maßstab in das Nomogramm bringen; bei den dreiskaligen Nomogrammen ist eine solche Maßstabvergrößerung meist nicht möglich.

3. Ableitung der vier wichtigsten Sonderfälle. Die Gl. (5) ist ein brauchbares Mittel zur Untersuchung, ob für eine gegebene Gleichung ein Nomogramm der beschriebenen Art überhaupt möglich ist. Für die Berechnung der Nomogramme selber ist sie etwas unhandlich. Die praktisch vorkommenden Gleichungen sind meist einfacher aufgebaut als Gl (5); d. h. es werden vielfach eine ganze Anzahl der vorkommenden Funktionen zu Konstanten oder auch zu Null. Die Gl. (5) soll deshalb entsprechend den am häufigsten vorkommenden Sonderfällen reduziert werden.

$$\text{1. Fall:} \quad \begin{aligned} F_1(x) - F_2(y) &= 1 \\ f_3(z) - f_4(v) &= 1 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich aus der Gl. (5):

$$f_1(x) - f_2(y) = F_3(z) - F_4(v)$$

oder

$$f_1(x) = f_2(y) + F_3(z) - F_4(v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Gl. (7) stellt wie man sieht, eine reine Addition der verschiedenen Funktionen dar. Aus den Gl. (2) folgt nunmehr

für Skala I	für Skala II	für Skala III	für Skala IV
$\mu = f_1(x)$	$\varrho = f_2(y)$	$\tau = F_3(z)$	$\varepsilon = F_4(v)$
$\nu - \sigma = 1$		$\vartheta - \delta = 1$	

Hierin sind μ und ϱ die Ordinaten; also sind I und II zwei zur Ordinatenachse parallele gradlinige Skalen [$\mu = f_1(x)$ und $\varrho = f_2(y)$] im Abstand 1 voneinander ($\nu - \sigma = 1$), ferner sind III und IV zwei zur Abszissenachse parallele gradlinige Skalen, ebenfalls im Abstand 1 voneinander. Das allgemein gültige Schema der Abb. 1 vereinfacht sich also auf zwei Paare von parallelen gradlinigen Skalen (Abb. 2). An Hand der Abb. 2 ließe sich die Gl. (7) auch unmittelbar ohne Benutzung von Gl. (5) ableiten. Mit den in Abb. 2 angegebenen Beziehungen folgt nämlich aus der Aehnlichkeit der beiden schraffierten Dreiecke unmittelbar:

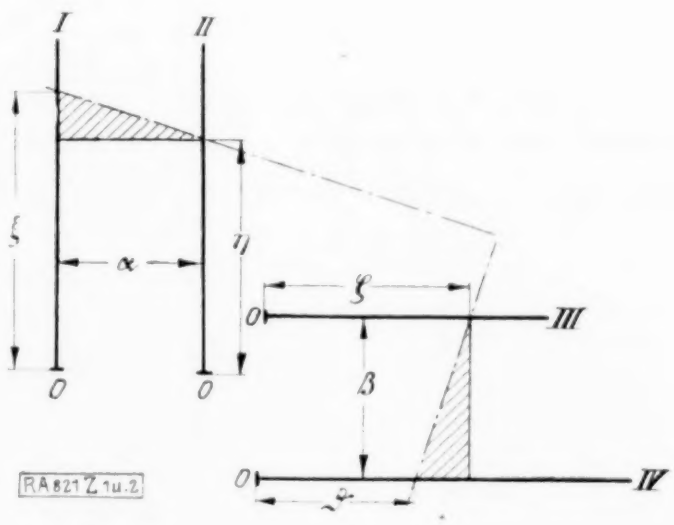


Abb. 2.

$$(\xi - \eta) : \alpha = (\zeta - \vartheta) : \beta$$

oder wenn $\alpha = \beta$ ist

$$\xi = \eta + \zeta - \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Trägt man nunmehr auf ξ die Werte $f_1(x)$, auf η die Werte $f_2(y)$, auf ζ die Werte $F_3(z)$ und auf ϑ die Werte $F_4(v)$ auf, so entspricht Gl. (8) der Gl. (7).

Würde man im besonderen als Funktionen die Logarithmen wählen, d. h. würde man setzen:

$$\xi = \log x\,, \quad \eta = \log y\,, \quad \zeta = \log z\,, \quad \vartheta = \log v\,,$$

so würde aus Gl. (8) folgen:

$$\log x = \log y + \log z - \log v\,, \quad \text{d. h.} \quad x = \frac{y \cdot z}{v}\,.$$

Man kann also ein Schema wie Abb. 2 in Verbindung mit den üblichen logarithmischen Skalen zur Berechnung eines beliebigen multiplikativen Ausdrucks mit vier Veränderlichen benutzen. Wie sich im folgenden zeigen wird, kann man jedoch dieselbe Gleichung auch mit rein linearen Skalen darstellen.

2. Fall:	$f_2(y) = 0$,	$F_4(v) = 0$
	$F_1(x) = 0$,	$f_3(z) = 0$

Damit ergibt sich:

$$\frac{f_1(x)}{-F_2(y)} = \frac{F_3(z)}{f_4(v)}$$

oder

$$f_1(x) = -F_2(y) \cdot \frac{F_3(z)}{f_4(v)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Die Gl. (9) stellt eine reine Multiplikation der verschiedenen Funktionen dar. Aus den Gl. (2) ergibt sich nunmehr:

für Skala I	für Skala II	für Skala III	für Skala IV
$\mu = f_1(x)$	$\varrho = 0$	$\vartheta = 0$	$\delta = f_4(v)$
$\nu = 0$	$\sigma = F_2(y)$	$\tau = F_3(z)$	$\varepsilon = 0$.

Hieraus folgt, daß Skala I und II zwei zueinander senkrechte Geraden sind, ebenso Skala III und IV. Es würde aber Skala I und IV sowie Skala II und III zusammenfallen; eine Ablesung wäre also unmöglich.

Man kann jedoch die vier Skalen auch etwas anders anordnen. In Abb. 3 steht Skala I senkrecht auf II und Skala III senkrecht auf IV. Für die vier Abschnitte auf vier Skalen ergibt sich dann aus der Aehnlichkeit der beiden schraffierten Dreiecke die Beziehung

$$\xi : \eta = \zeta : \vartheta ,$$

also

$$\xi = \eta \cdot \frac{\zeta}{\vartheta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

oder, wenn man einsetzt:

$$\xi = f_1(x), \qquad \eta = f_2(y), \qquad \zeta = F_3(z), \qquad \vartheta = f_4(v),$$

$$f_1(x) = F_2(y) \cdot \frac{F_3(z)}{f_4(v)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9\,a).$$

Die Gl. (9a) entspricht durchaus der Gl. (9). Mit einem Schema nach Abb. 3 lassen sich also multiplikative Ausdrücke der gegebenen Form darstellen. In Abb. 3 sind die Schnittpunkte verhältnismäßig flach, auch ist die Skalenanordnung unbequem. Da die Gl. (10) lediglich auf der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke beruht, kann man Abb. 3 leicht etwas umgestalten, ohne an Gl. (10) etwas abzuändern. Abb. 4 zeigt die geänderte Skalenanordnung. Skala I und II bilden einen beliebigen Winkel miteinander; Skala III steht auf I und Skala IV auf II senkrecht. Dann müssen die beiden schraffierten Dreiecke für jede beliebige Lage des Schnittwinkels ähnlich sein; also behält Gl. (10) bzw. (9a) auch für Abb. 4 volle Gültigkeit. Abb. 4 stellt also nunmehr das endgültige Schema für reine Multiplikationen dar. Man hätte die Skalenanordnung der Abb. 4 natürlich auch unmittelbar aus den allgemeinen Gl. (4) bzw. (5) ableiten können. Die Ableitung wäre aber umständlicher geworden.

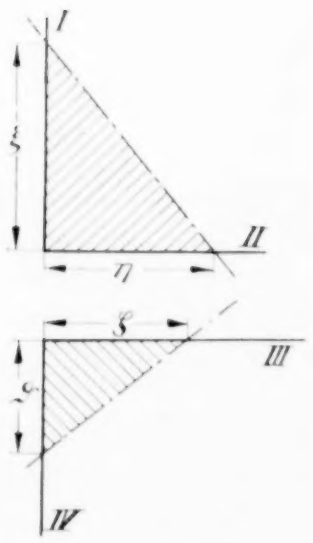


Abb. 3.

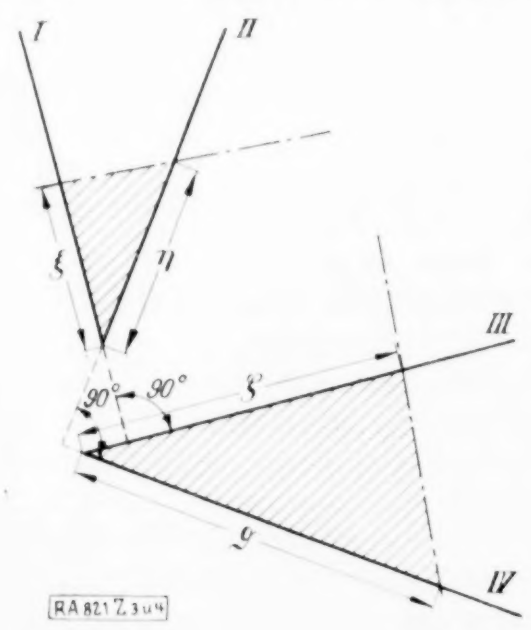


Abb. 4.

3. **Fall:** $F_1(x) - F_2(y) = 1$
$F_4(v) = 0; \quad f_3(z) = 0$

Daraus folgt

$$f_1(x) - f_2(y) = \frac{F_3(z)}{f_4(v)}$$

oder

$$f_1(x) = \frac{F_3(z)}{f_4(v)} + f_2(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Die Gl. (11) enthält multiplikative und additive Glieder gleichzeitig. Aus den Gl. (2) ergibt sich die Skalenanordnung:

für Skala I	für Skala II	für Skala III	für Skala IV
$\mu = f_1(x)$	$\varrho = f_2(y)$	$\vartheta = 0$	$\delta = f_4(v)$
$\nu - \sigma = 1$		$\tau = F_3(z)$	$\varepsilon = 0$.

Es sind also die Skalen I und II zwei paralle Geraden mit dem Abstand 1 und die Skalen III und IV zwei senkrecht aufeinanderstehende Gerade. Abb. 5 zeigt die Skalenanordnung, die ebenfalls — wie im Fall 2 — für die praktische Anwendung etwas abgeändert ist. Aus der Gleichung der schraffierten Dreiecke folgt ähnlich wie vorher

$$(\xi - \eta) : \alpha = (\zeta - \vartheta \cdot \cos\gamma) : \vartheta \cdot \sin\gamma$$

oder

$$\xi - \eta = \alpha \cdot \frac{\zeta}{\vartheta \sin\gamma} - \alpha \cot\gamma$$

und daraus

$$\xi = \frac{\alpha}{\sin\gamma} \cdot \frac{\zeta}{\vartheta} + \eta - \alpha \cdot \cot\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Hierin sind α, $\sin\gamma$ und $\cot\gamma$ irgend welche Konstante, die beliebig mit Rücksicht auf den praktisch erforderlichen Ablesebereich gewählt werden können, und zwar ist α der Abstand der beiden parallelen Skalen, und Winkel γ der Winkel zwischen den sich schneidenden Skalen.

Setzt man $\xi = f_1(x)$, $\quad \zeta = \frac{\sin\gamma}{\alpha} \cdot f_3(z)$

$\eta = f_2(y) + \alpha \cdot \cot\gamma$, $\quad \vartheta = f_4(v)$,

so geht die Gl. (11) hervor. Abb. 5 ist also für Darstellungen von Gleichungen dieser Form geeignet.

4. **Fall:** $F_1(x) - F_2(y) = 1$
$f_3(z) = 0$

Damit folgt:

$$f_1(x) = \frac{F_3(z)}{f_4(v)} - \frac{F_4(v)}{f_4(v)} + f_2(y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Die Gl. (13) enthält ein multiplikatives und zwei additive Glieder. Für die Skalenanordnung ergibt sich:

für Skala I	für Skala II	für Skala III	für Skala IV
$\mu = f_1(x)$	$\varrho = f_2(y)$	$\vartheta = 0$	$\delta = f_4(v)$
$\nu - \sigma = 1$		$\tau = F_3(z)$	$\varepsilon = F_4(v)$.

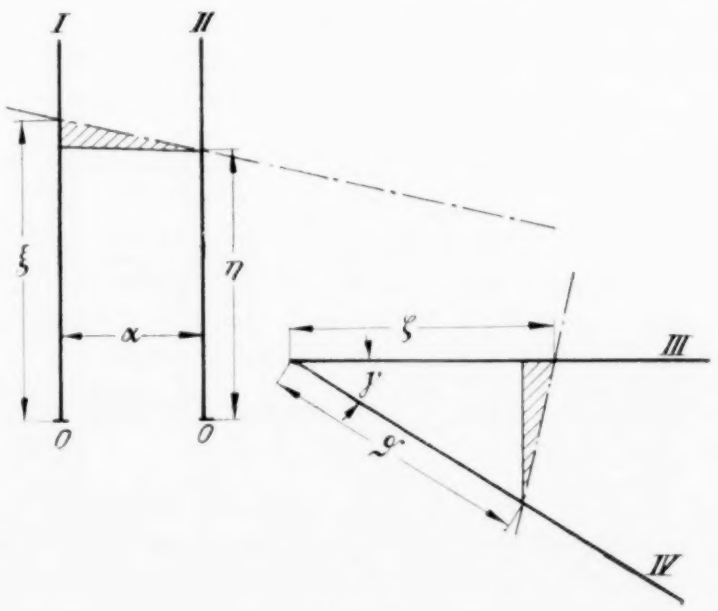


Abb. 5.

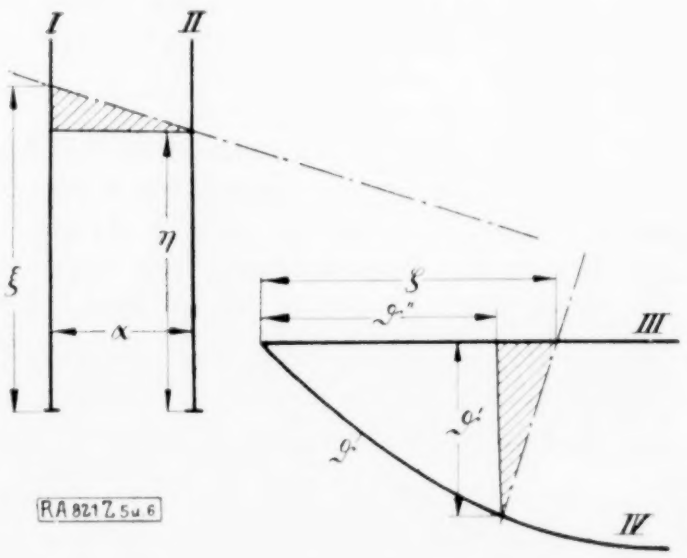


Abb. 6.

Skala I und II sind wieder zwei parallele Geraden, Skala III ist eine Gerade, die auf I bzw. II senkrecht steht, Skala IV ist eine Kurve. Die Skalenanordnung zeigt Abb. 6. Wie früher, kann man auch hier aus der Aehnlichkeit der schraffierten Dreiecke die Gl. (13) unmittelbar ableiten. Es ist nämlich:

$$(\xi - \eta) : a = (\zeta - \vartheta'') : \vartheta' .$$

Hierin sind ϑ'' und ϑ' Abszisse bzw. Ordinate der Kurve.

Es folgt:
$$\xi = a \cdot \frac{\zeta}{\vartheta'} - a \cdot \frac{\vartheta''}{\vartheta'} + \eta .$$

Setzt man: $\xi = f_1(x)$, $\eta = f_2(y)$, $\zeta = F_3(z)$, $\vartheta' = a \cdot f_4(v)$, $\vartheta'' = F_4(v)$,
so geht die Gl. (13) hervor.

4. Zusammenfassung. An diesen vier Sonderfällen, die aus der Hauptgleichung abgeleitet wurden, lassen sich die charakteristischen Eigenschaften der beschriebenen Nomogrammart erkennen.

Bei allen Fällen kann man je zwei paarweise zusammengehörige Skalen feststellen, so daß man also von zwei Skalen*paaren* sprechen kann. Für jedes dieser Skalenpaare ergaben sich drei Möglichkeiten der Skalenanordnung, nämlich:

1. zwei sich unter einem beliebigen Winkel schneidende geradlinige Skalen für multiplikative Glieder der darzustellenden Gleichung,
2. zwei parallele geradlinige Skalen für additive Glieder,
3. eine geradlinige und eine Kurvenskala für zusammengesetzte Glieder.

Da zu jeder Tafel zwei solcher Skalenpaare gehören, so erhält man insgesamt sechs Kombinationsmöglichkeiten, von denen allerdings im vorstehenden nur vier behandelt sind.

Außer den aufgezählten drei Möglichkeiten der Skalenanordnung sind aber noch weitere sehr wohl denkbar, so daß die Methode jedenfalls an Vielseitigkeit nichts zu wünschen übrig läßt. Für die nomographische Darstellung komplizierterer Gleichungen wird es sich im allgemeinen empfehlen, die Gl. (4) und (5) nur als Kriterium, ob ein Nomogramm der vorstehenden Art überhaupt möglich ist, zu benutzen, sowie zur allgemeinen Orientierung über die erforderliche Skalenanordnung. Hat man diese im Prinzip gefunden, so wird man sie, so wie es vorstehend geschehen ist, unmittelbar dem vorliegenden Einzelfall anpassen.

Bei allen Skalenanordnungen wird man hierbei stets zwei geometrisch-ähnliche Dreiecke finden können (die in den gezeichneten Schemas überall schraffiert sind); mit Hilfe dieser Dreiecke erhält man dann immer übersichtliche Zusammenhänge.

5. Einführung weiterer Veränderlichen. Bisher waren nur Nomogramme mit vier Skalen behandelt. An die Stelle jeder einzelnen Skala kann aber auch eine Skalenschar, also eine »Funktionsfläche« treten. Die Anzahl der Veränderlichen verdoppelt sich dann.

Für diesen Fall muß die Gl. (4) ihre Geltung unverändert behalten, aber da die vier Punkte nun nicht mehr auf Kurven, sondern auf Kurvenscharen liegen, so sind die Gl. (2) entsprechend abzuändern; denn jede Skalenschar ist nicht durch einen, sondern durch zwei Parameter gegeben. Für die Skalenschar I ergeben sich beispielshalber:

$$\mu = f_1(m, n) , \qquad \nu = F_1(m, n).$$

Hierin sind m und n zwei beliebig voneinander unabhängige Veränderliche. Für die übrigen Skalen ergaben sich analoge Gleichungen. Ersetzt man also in Gl. (5) jede einzelne Veränderliche x, y, z, v durch deren zwei, so erhält man die allgemein gültige Form für solche Gleichungen, die sich durch vier Skalen*scharen* darstellen lassen.

Von Skalenscharen kann man in zwei Fällen vorteilhaft Gebrauch machen, nämlich:

1. Wenn die Anzahl der Veränderlichen größer ist als vier.
2. Wenn zwar nur vier Veränderliche vorhanden sind, aber ihre Zusammenhänge komplizierter sind als die einfache Gl. (5) zuläßt.

Zu dem ersten Fall braucht nichts weiter gesagt zu werden; zu dem zweiten Fall sei bemerkt, daß sich auf diese Weise, wie leicht einzusehen ist, jede beliebige Gleichung der ganz allgemeinen Form

$$f(x, y) = F(z, v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

durch ein Nomogramm darstellen lassen muß. Man kann die beschriebene Nomogrammart auch noch in etwas anderer Weise abändern. Bei der Ableitung von Gl. (4) war folgende Gleichung benutzt worden:

$$\frac{\varrho - \mu}{\sigma - \nu} = \operatorname{tg} \varphi \, .$$

Ersetzt man das eine Skalenpaar durch eine einzigste Kurve $\eta = f(\xi)$, an welcher die eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks eine Tangente bildet, so kann man statt tg φ einsetzen $\frac{d\eta}{d\xi}$ und erhält damit:

$$\frac{\varrho - \mu}{\sigma - \nu} = \frac{d\eta}{d\varepsilon} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (16).$$

Diese Gleichung gibt ein recht bequemes Hilfsmittel, um auf graphischem Wege aus einer gegebenen Kurve die Differentialkurve abzuleiten, oder auch umgekehrt, eine Integralkurve zu konstruieren; im übrigen enthält jedoch Gl. (16) nicht mehr vier, sondern nur noch drei Veränderliche. Die Untersuchung ihrer Anwendungsmöglichkeit fällt daher nicht mehr in den Rahmen vorliegender Arbeit.

Anwendungsbeispiele.

Die beschriebene Methode soll nunmehr an einigen Anwendungsbeispielen etwas näher erläutert werden.

Erstes Beispiel: Hyperbelgleichung:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

In dieser Gleichung sind a und b an sich zwar Konstante, jedoch nur für eine bestimmte Hyperbel. Soll ein Nomogramm entworfen werden, welches für beliebige Hyperbeln gelten soll, so ist auch a und b als veränderlich anzusehen.

Die Hyperbelgleichung wurde als erstes Beispiel gewählt, weil sie sich nicht auf die Form einer der vier behandelten Sonderfälle bringen läßt, so daß sie ein zweckmäßiges Beispiel für die Anwendung der allgemeinen Gl. (4) bzw. (5) ergibt. Zunächst sei die Hyperbelgleichung etwas umgeformt:

$$\frac{x^2 - a^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

Gl. (4) lautete: $\frac{\mu - \varrho}{\nu - \sigma} = \frac{\tau - \varepsilon}{-\vartheta + \delta}$.

Hieraus ergibt sich:

für Skala I	für Skala II	für Skala III	für Skala IV
$\mu = x^2$	$\varrho = +a^2$	$\vartheta = 0$	$\delta = b^2$
$\nu = 0$	$\sigma = -a^2$	$\tau = y^2$	$\varepsilon = 0$.

Die Skala I ist demnach eine Gerade parallel zur Ordinatenachse, Skala II ist eine Gerade unter 45°, Skala III und IV sind zwei aufeinander senkrecht stehende Gerade. Abb. 7 zeigt die Skalenanordnung; dieselbe ist, ebenso wie früher, etwas durch Vorzeichenwechsel abgeändert, um eine bequeme Ablesung zu ermöglichen. Auf Grund der Aehnlichkeit der Dreiecke läßt sich die Richtigkeit dieser Skalenanordnung leicht nachprüfen. Daß die Skalen quadratisch geteilt sind, braucht nicht besonders erwähnt zu werden.

Zweites Beispiel: Berechnung des logarithmischen Dekrementes gedämpfter Schwingungen. Hierfür gilt:

$$\boxed{\lambda = \frac{\pi \cdot C}{\sqrt{4 \varkappa m - C^2}}}$$

oder etwas umgeformt:

$$\varkappa = \frac{C^2 (\pi^2 + \lambda^2)}{4 m \cdot \lambda^2} \, .$$

Diese Gleichung entspricht der als zweiter Sonderfall behandelten Gl. (10), wenn man setzt:

$$\xi = \varkappa \qquad \zeta = \frac{\pi^2 + \lambda^2}{\lambda^2}$$

$$\eta = C^2 \qquad \vartheta = 4 m \, .$$

Man kann also das Schema der Abb. 3 verwenden. Zwei Skalen, nämlich I und IV, sind rein linear, Skala II ist quadratisch geteilt. Die Skala III erhält eine Spezialteilung (Abb. 8).

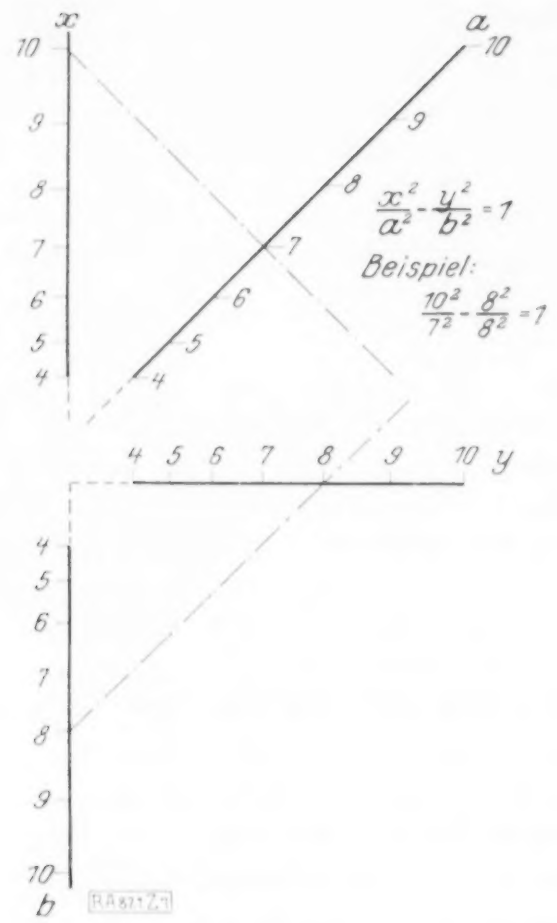


Abb. 7.

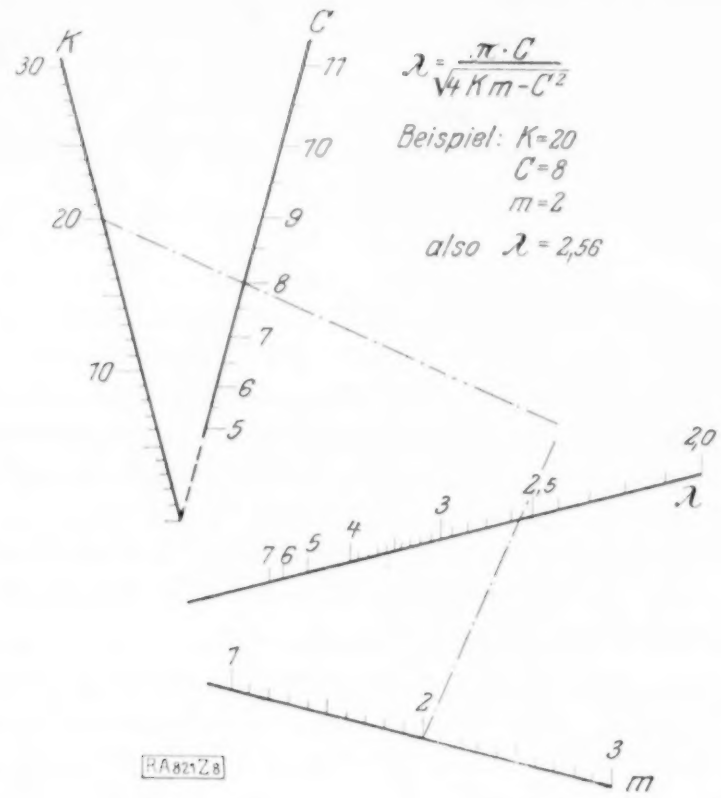


Abb. 8.

Die Periodenzahl gedämpfter elektrischer Schwingungen läßt sich nach der Gleichung

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L\,c} - \delta^2}$$

berechnen. Quadriert man diese Gleichung, so erhält man:

$$\omega^2 = \frac{1}{L\,c} - \delta^2.$$

Diese Gleichung entspricht in dieser Form der als dritten Sonderfall behandelten Gl. (12). In dieser Gleichung konnten zwei Größen, nämlich a (der Abstand zwischen den parallelen Skalen) und Winkel γ (zwischen den sich schneidenden Skalen) beliebig mit Rücksicht auf den Ablesebereich gewählt werden.

Es sei willkürlich gewählt: $a = 50$ mm und $\cot\gamma = \frac{200}{50}$, und damit wird $\frac{1}{\sin\gamma} = \sqrt{17}$ und aus Gl. (12) ergibt sich: $\xi = 50 \cdot \sqrt{17} \cdot \frac{\zeta}{\vartheta} - 200 + \eta$.

Setzt man: $\xi = \omega^2, \qquad \zeta = \frac{1}{50 \cdot \sqrt{17}} \cdot \frac{1}{c}, \qquad \eta = 200 - \delta^2, \qquad \vartheta = L,$

so geht die darzustellende Gleichung für die Periodenzahl hervor. Die Berechnung der einzelnen Skalen ist nach den sich ergebenden vier Gleichungen leicht durchzuführen. Abb. 9 zeigt die fertige Tafel, sie ist um 90^0 gegenüber dem Schema Abb. 5 gedreht. Auf den praktisch erforderlichen Ablesebereich wurde, um zunächst erst mal das prinzipielle der Methode zu erläutern, weder in diesem, noch in dem vorigem Beispiel Rücksicht genommen.

Drittes Beispiel. Da aber Ablesebereich und Ablesegenauigkeit bekanntlich vielfach für die Brauchbarkeit einer Rechentafel entscheidend sind, soll im folgenden Beispiel darauf näher eingegangen werden.

Als Beispiel sei eine Gleichung aus dem Gebiet des Schiffbaues gewählt.

Für die Berechnung der ideellen Schifflänge gilt die Beziehung:

$$\boxed{l_i = l \cdot \frac{q + 1{,}7\,t/b}{1 + 2 \cdot t/b}}$$

Hierin ist l_i die ideelle und l die tatsächliche Schiffslänge, t und b ist Tiefe und Breite des Schiffes. Die Größe q ist ein von der Bauart des Schiffes abhängiger Koeffizient,

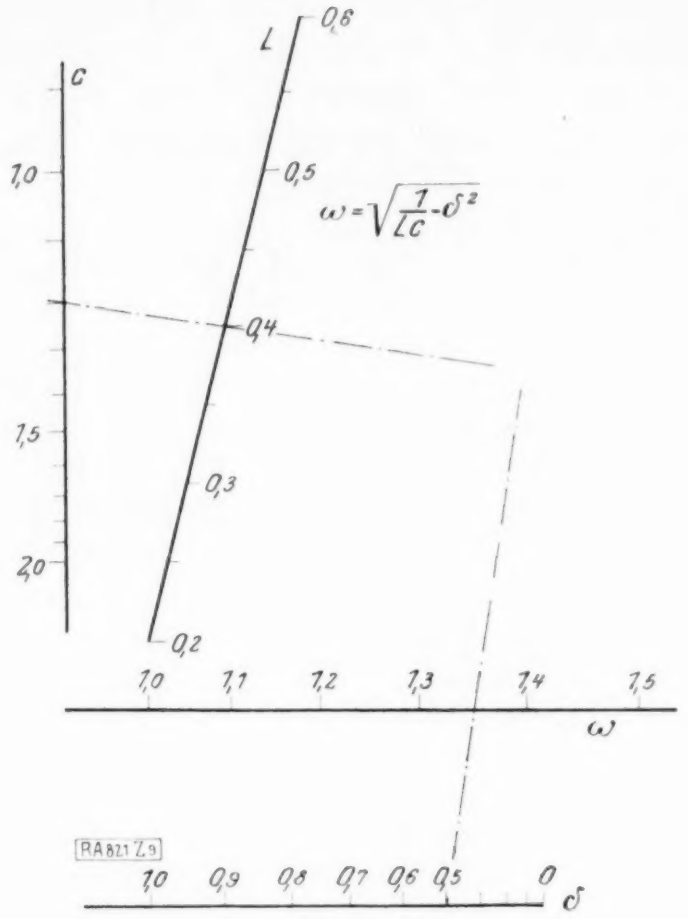


Abb. 9.

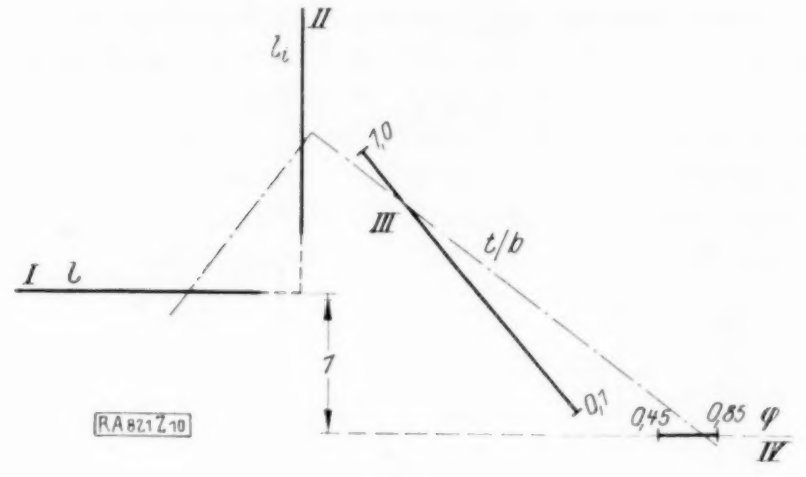


Abb. 10.

der zwischen 0,45 und 0,85 liegen kann; das Verhältnis t/b kann etwa zwischen 0,1 und 0,6 liegen. Die Gleichung ist für die nomographische Behandlung wegen des sowohl im Zähler, als auch im Nenner vorkommenden Summenzeichens interessant; sie hat nicht die Form eines der behandelten Sonderfälle, es muß deshalb auf Gl. (4) zurückgegriffen werden. Es ist

$$\frac{l_i}{l} = \frac{\varphi + 1{,}7\ t/b}{1 + 2\ t/b} \quad \text{und} \quad \frac{\mu - \varrho}{\nu - \sigma} = \frac{\tau - \varepsilon}{-\vartheta + \delta},$$

also folgt

für Skala I	für Skala II	für Skala III	für Skala IV
$\mu = l_i$	$\varrho = 0$	$-\vartheta = 1$	$\delta = 2\ t/b$
$\nu = 0$	$-\sigma = l$	$\tau = \varphi$	$-\varepsilon = 1{,}7\ t/b$

Hiernach würde sich die Skalenanordnung in Abb. 10 ergeben. Alle Skalen sind linear, aber eine Ablesung ist beinahe unmöglich. In Abb. 10 gibt der ausgezogene Teil der Skala den praktisch interessierenden Meßbereich an. Eine bessere Anordnung würde man erhalten, wenn man die Skala III durch Vorzeichenänderung von δ und ξ um 180^0 drehen würde, dann ist aber auch gleichzeitig das Vorzeichen von φ zu ändern. Ferner scheint es zweckmäßig, die Skala für φ so zu ändern, daß sie für den größten Wert von φ, nämlich $\varphi = 0{,}85$, gerade durch den Nullpunkt geht. Man müßte also die gegebene Gleichung so umformen, daß sie statt φ den Ausdruck $(0{,}85 - \varphi)$ enthält. Schließlich ist noch der Skalenmaßstab für III und IV zu vergrößern. Die gegebene Gleichung soll dementsprechend umgeformt werden. Subtrahiert man auf beiden Seiten den Wert 0,8, so ergibt sich:

$$\frac{l_i}{l} - 0{,}8 = \frac{\varphi + 1{,}7\ t/b}{1 + 2\ t/b} - 0{,}8,$$

$$\frac{l_i - 0{,}8\ l}{l} = \frac{\tau + 1{,}7\ t/b - 0{,}8 - 1{,}6 \cdot t/b}{1 + 2\ t/b} = \frac{\varphi - 0{,}85 + 0{,}05 + 0{,}1 \cdot t/b}{1 + 2\ t/b},$$

$$\frac{l_i - 0{,}8\ l}{l} = \frac{1 + 2\ t/b - 20\ (0{,}85 - \varphi)}{20\ (1 + 2\ t/b)}.$$

Die Gleichung enthält nunmehr den Klammerausdruck $(0{,}85 - \varphi)$, und auch die Vorzeichen für δ und ξ sind so wie es oben angegeben war. Die Ablesegenauigkeit für φ und t/b ist aber noch zu klein. Es sei deshalb auf beiden Seiten mit 5 multipliziert, dies ergibt:

$$5 \cdot \frac{l_i - 0{,}8\ l}{l} = \frac{5\ (1 + 2\ t/b) - 100\ (0{,}85 - \varphi)}{20\ (1 + 2\ t/b)}.$$

Schließlich wird auf der rechten Seite Zähler und Nenner nochmals mit 2,5 multipliziert. Damit wird endgültig

$$\frac{l_i - 0{,}8\ l}{0{,}2 \cdot l} = \frac{12.5\ (1 + 2\ t/b) - 250\ (0{,}85 - \varphi)}{50\ (1 + 2\ t/b)}.$$

Auch Gl. (4) sei noch etwas abgeändert:

$$\frac{\mu - \varrho}{\nu - \sigma} = \frac{\tau - 12{,}5\ (\varepsilon - 12{,}5)}{-\vartheta + \delta},$$

daraus folgt:

für Skala I	für Skala II	für Skala III	für Skala IV
$\mu = l_i$	$\varrho = 0{,}8\,l$	$-\vartheta = 40 + 100\ t/b$	$\delta = 10$
$\nu = 0$	$-\sigma = 0{,}2\,l$	$\tau = 25 + 25\ t/b$	$\varepsilon = 250\,(0{,}85 - q) + 12{,}5$.

Zur Kontrolle setze man diese Werte in Gl. (4) ein, dann muß die darzustellende Gleichung hervorgehen. Mit diesen Skalen ist nunmehr Abb. 11 aufgezeichnet. Für alle Skalen ergibt sich ein wesentlich günstigerer Ablesebereich als in Abb. 10.

Ueber die Art und Weise der Umformungen, welche nötig sind, um einen gewünschten Ablesebereich zu erhalten, lassen sich schwer allgemein-gültige Regeln aufstellen, da sie ganz und gar von der gerade vorliegenden Aufgabe abhängen. Wenn im vorstehenden die Umformung so eingehend beschrieben wurde, so geschah das auch nur, um zu zeigen, welche vielfachen Möglichkeiten vorhanden sind. (Addition einer konstanten Größe, beiderseitige Multiplikation mit einem konstanten Faktor, Erweiterung von Zähler und Nenner auf der einen Seite usw.) Im allgemeinen wird es sich nicht empfehlen, die Umformung, wie eben beschrieben, rein analytisch vorzunehmen; es wird meistens einfacher sein, nur die grundsätzliche Skalenanordnung mittels Gl. (4) analytisch

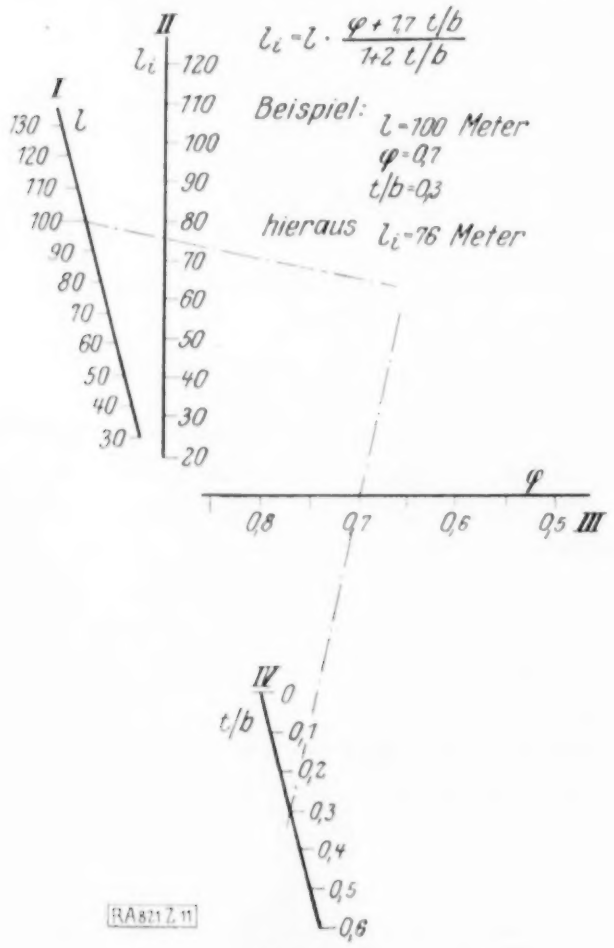


Abb. 11.

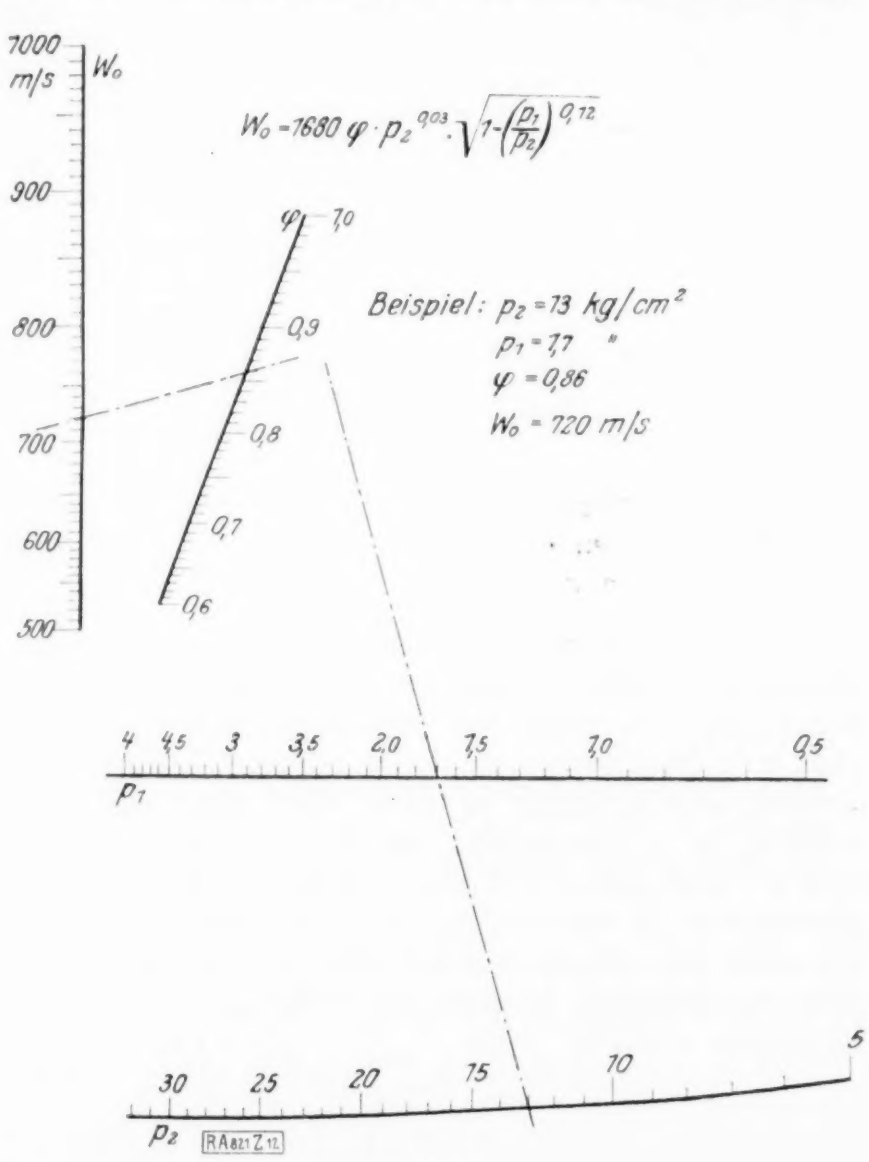


Abb. 12.

zu berechnen, aber im einzelnen Maßstab und Lage bei Aufzeichnen auszuprobieren. Die weiter oben erwähnte Aehnlichkeit der beiden in Frage kommenden Dreiecke bietet hierfür ein ausgezeichnetes Hilfsmittel, welches stets einen einfachen und zuverlässigen Ueberblick über die Zusammenhänge gibt.

Viertes Beispiel. Hierfür sei ein solches gewählt, bei welchem eine Skala zu einer Kurve wird. Eine Formel für die Ausflußgeschwindigkeit von Wasserdampf lautet:

$$\boxed{w_0 = 1680 \cdot \varphi \cdot p_2^{0{,}03} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{0{,}12}}}$$

Hierin ist w_0 die Ausflußgeschwindigkeit, p_2 bzw. p_1 der Druck vor und hinter der Düse, und φ der Ausflußkoeffizient ($\varphi < 1$). Die Gleichung läßt sich etwas umformen:

$$\left(\frac{w_0}{1680 \cdot \varphi}\right)^2 = \frac{p_2^{0{,}12} - p_1^{0{,}12}}{p_2^{0{,}06}}.$$

Hieraus folgt wie früher mit Hilfe der Gl. (4)

für Skala I	für Skala II	für Skala III	für Skala IV
$\mu = w_0^2$	$\varrho = 0$	$\vartheta = 0$	$\delta = p_2^{0,06}$
$\nu = 0$	$\sigma = (1680 \cdot q)^2$	$\tau = -p_1^{0,12}$	$-\varepsilon = p_2^{0,12}$.

Skala I und II sind zwei aufeinander senkrecht stehende geradlnige Skalen, Skala III ist ebenfalls eine geradlinige Skala, Skala IV ist eine Kurve, deren Abszissen aus $-\varepsilon = p_2^{0,12}$ und deren Ordinaten aus $\delta = p_2^{0,06}$ berechnet werden können. Auf die mit Rücksicht auf den praktischen Ablesebereich vorgenommenen Umformungen soll nicht eingegangen werden. Das fertige Nomogramm zeigt Abb. 11. Bemerkenswert ist hieran die geringe Krümmung der Kurvenskala (p_2). In Wirklichkeit würde sie noch viel flacher verlaufen, um sie überhaupt als Kurve kenntlich zu machen, ist sie in Abb. 11 übertrieben gekrümmt (also unrichtig) eingezeichnet. Man kann die Kurvenskala in diesem Falle unbedenklich durch eine Gerade ersetzen. Das ergibt ein recht bequemes Hilfsmttel, um aus einem Nomogramm rückwärts eine Annäherungsformel abzuleiten, wobei man den innerhalb des praktischen Ablesebereichs möglichen Fehler unmittelbar vor Augen hat.

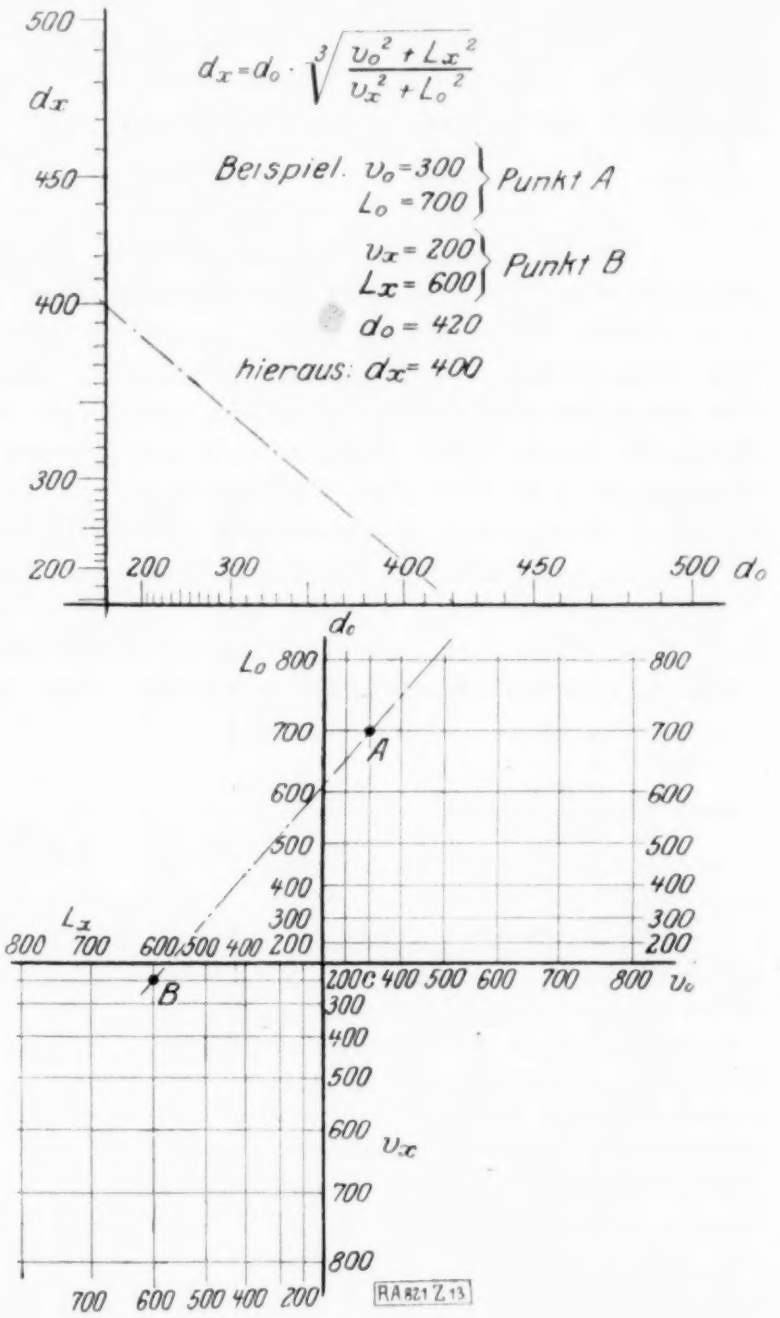


Abb. 13.

Fünftes Beispiel. Schließlich sei noch ein Beispiel für die Anwendung von Kurvenscharen bzw. Funktionsflächen gebracht. Die Gleichung:

$$d_x = d_0 \cdot \sqrt[3]{\frac{v_0^2 + L_x^2}{v_x^2 + L_0^2}}$$

enthält insgesamt sechs veränderliche Größen. Man kann sie auch schreiben:

$$\frac{d_x^3}{d_0^3} = \frac{v_0^2 + L_x^2}{v_x^2 + L_0^2}.$$

Mit Hilfe von Gl. (4) folgt hieraus:

für Skala I	für Skala II	für Skala III	für Skala IV
$\mu = d_x^3$	$\varrho = 0$	$-\vartheta = L_0^2$	$\delta = v_x^2$
$\nu = 0$	$\sigma = d_0^3$	$\tau = v_0^2$	$\varepsilon = L_x^2$.

Für Skala I und II ergeben sich zwei aufeinander senkrecht stehende kubisch geteilte gradlinige Skalen. An Stelle der Skala III erhält man zwei Geradenscharen (v_0^2 und L_0^2), ebenso an Stelle der Skala IV. Die fertige Tafel zeigt Abb. 13. Sie ist so zu benutzen, daß man zunächst aus v_0 und L_0 den Punkt A, darauf aus v_x und L_x den Punkt B aufsucht. Dann legt man die eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks durch diese beiden Punkte und verschiebt solange parallel, bis die andere Kathete durch d_0 geht. Daraus folgt auf Skala I der gesuchte Wert d_x. Daß man den Rechnungsgang auch umkehren kann und z. B. L_x als Schlußresultat ablesen kann, braucht nicht besonders betont zu werden. Ferner besteht die Möglichkeit, einen etwa zwischen v_0 und L_0 oder zwischen L_x und d_x vorhandenen Zusammenhang durch eine Kurve kenntlich zu machen. Trotz der sechs Veränderlichen ist die Ablesung also recht bequem. Berücksichtigt man ferner die Aehnlichkeit [1]) des Dreiecks $A\,B\,C$ mit dem von d_x^3 und d_0^3 und

[1]) Es ist $A\,C = L_0^2 + v_x^2$ und $B\,C = L_x^2 + v_0^2$, also $d_x^3 : d_0^3 = B\,C : A\,C = (v_0^2 + L_x^2) : (v_x^2 + L_0^2)$.

der oberen Kathete gebildeten Dreieck, so dürfte es ein leichtes sein, die Abb. 13 auch auch für andere Ablesebereiche umzugestalten.

Die gebrachten Beispiele genügen, um die vielseitige Anwendbarkeit der vierskaligen Nomogramme zu zeigen; sie zeigen auch, worin der Unterschied gegenüber den üblichen dreiskaligen Nomogrammen liegt. Um mit zwei dreiskaligen, durch Zapfenlinie verbundenen Nomogrammen eine Gleichung zwischen vier Veränderlichen darstellen zu können, muß man die Gleichung in zwei einzelne Gleichungen mit je zwei Veränderlichen und einer Hilfsgröße zerlegen können. Die Gl. (4) bzw. (5) kann man in dieser Weise zerlegen: denn man kann schreiben:

$$\frac{f_1(x) - f_2(y)}{F_1(x) - F_2(y)} = m\,, \qquad \frac{F_3(z) - F_4(v)}{-f_3(z) + f_4(v)} = m\,.$$

Es ist demnach grundsätzlich möglich, jedes der vorstehend erwähnten Nomogramme auch durch zwei zusammengesetzte dreiskalige Nomogramme zu ersetzen, nötigenfalls durch Verwendung einer krummlinigen Zapfenlinie. Diese Darstellungsart wird freilich manchmal komplizierter ausfallen, aber sie ist jedenfalls im Prinzip stets möglich. Ein grundsätzlicher Unterschied zwischen beiden Nomogrammarten besteht also in dieser Hinsicht nicht. Der Unterschied beruht vielmehr darauf, daß man bei den »vierskaligen« Nomogrammen alle vier Größen mit der gleichen Ablesung erhält, so daß man niemals an eine bestimmte Reihenfolge der Einzelablesungen gebunden ist, wie bei zusammengesetzten dreiskaligen Nomogrammen; außerdem ist noch der praktisch sehr ins Gewicht fallende Unterschied vorhanden, daß man in viel größerem Umfange lineare Skalen und meistens, auch bei komplizierteren Gleichungen, viel übersichtlichere Zusammenhänge erhält. Alles in allem scheint es so, daß die Anwendungsmöglichkeit der beschriebenen Nomogrammart recht groß ist. 821

KLEINE MITTEILUNGEN

Laminare Bewegung zäher Flüssigkeit in logarithmischen Spiralen. Einleitung. G. Hamel hat einige Fälle angegeben, in denen die vollständigen Differentialgleichungen der unzusammendrückbaren Flüssigkeiten mit Berücksichtigung der Reibung exakt integriert werden können[1]). Unter anderm untersuchte er den Fall, daß die Stromlinien logarithmische Spiralen

$$a \log r + b\,\vartheta = \text{Konst.} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

sind. r und ϑ sind Polar-Koordinaten, a und b beliebige Konstanten. Als unabhängige Veränderliche wandte er die Funktion

$$q = -\frac{2}{a^2 + b^2}(a \log r + b\,\vartheta) + q_0 \quad . \quad (2)$$

an. Die Stromgeschwindigkeit ist gleich

$$\frac{2\,u(q)}{r\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Die Funktion u von q erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dq^2} + 2\,a\,\frac{du}{dq} + (a^2 + b^2)\,u - \frac{b}{2\,\nu}\,u^2 = C \qquad (3),$$

worin C eine Konstante ist. ν ist die kinematische Zähigkeit.

Die Untersuchungen des Grenzfalles $a = o$, wo die Stromlinien Gerade sind, die im Ursprunge zusammenlaufen, brachten eine ausgeprägte Verschiedenheit zwischen der Strömung in der Richtung der Druckefälle und Strömung gegen den Druck an den Tag[2]). Es ist sehr befriedigend, daß dieses Ergebnis mit der alltäglichen Erfahrung übereinstimmt.

Auch wenn a von Null verschieden ist und die Stromlinien also Spiralen sind, besteht dieselbe Verschiedenheit, was Hamel unmittelbar aus der Differentialgleichung (3) ableiten konnte. (3) ist aber, soviel wir wissen, noch nicht integriert worden.

Da die Hamelschen Strömungen nach dem oben Gesagten von besonderem Interesse zu sein scheinen, sei hier das Integral von (3) in einem Spezialfalle angegeben[3]). Unser bisheriges Ergebnis erfüllt unsere Hoffnungen allerdings nicht. Unser Spezialfall stellt nämlich nur ein Analogon der bekannten parabolischen Strömung einer zähen Flüssigkeit zwischen zwei parallelen Ebenen dar. Da wir aber unsere Untersuchungen einstweilen abbrechen müssen, halten wir es gleichwohl für richtig, die bisherigen Ergebnisse mitzuteilen.

Integration von (3). In seiner preisgekrönten Arbeit[4]): »*Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables*« hat Picard auch gelegentlich die Differentialgleichung (3) diskutiert und folgendes Ergebnis

[1]) G. Hamel, Jahresbericht der deutschen Math.-Vereinigung 1916.

[2]) Th. v. Kármán, Vorträge Innsbruck 1922, herausgeg. v. Kármán und Levi-Civita Berlin 1924.

[3]) Nach Abschluß unserer Rechnungen wurde uns von Herrn Prof. C. W. Oseen, der mit einer Erweiterung der Hamelschen Methode beschäftigt ist, andeutungsweise mitgeteilt, wie (3) ohne unsere Beschränkung numerisch integriert werden kann.

[4]) Journal de math., Séc. 4, **5**, 1889, S. 286.

gefunden. Fordert man, daß für alle endlichen reellen oder komplexen Werte der Veränderlichen φ die Funktion v regulär ist oder höchstens Pole [1]) hat so besitzt (3) nur dann ein Integral der verlangten Art, wenn die Bedingung

$$(a^2+b^2)^2 - \frac{2^6 \cdot 3^2}{5^4} a^4 = 2\,\frac{b}{\nu}\,C \quad . \quad . \quad (4)$$

erfüllt ist.

In einem Briefe an Picard führte nachher Mittag-Leffler die Integration durch [2]). Mit unseren Bezeichnungen hat sein Ergebnis die Form:

$$u = \frac{\nu}{b}\left[12\left(\frac{2\,a}{5}\right)^2 e^{-4/5\,a\varphi}\,p\,(e^{-2/5\,a\varphi}+z_0 \mid 0, H) + \left(\frac{a}{5}\right)^2 + b^2\right].$$

Dabei ist p die elliptische Funktion von Weierstraß. Diese ist unten für das Bedürfnis dieser Note tabuliert. z_0 und H sind Integrationskonstanten.

Da $p\,(z \mid 0, H) = -H^{1/3} p\,(i\,H^{1/6}\,z \mid 0, -1)$ ist, kann man u auf die Form

$$u = \frac{\nu}{b}\left[12\left(\frac{5}{2\,a}\right)^2 z^2\,p\,(z+z_1 \mid 0, -1) + \left(\frac{a}{5}\right)^2 + b^2\right]$$

bringen, wobei z_1 eine neue Konstante ist und

$$i\,H^{1/6}\,e^{-2/5\,a\varphi} = z$$

gesetzt wurde. Von der Konstante H kann man sich ganz befreien, wenn man

$$\frac{1}{6}\log H + \frac{\pi\,i}{2} + \varphi_0 = \varphi_0^*$$

setzt, denn dann erscheint z, wegen (2), in der Gestalt

$$z = e^{-2/5\,a\varphi^*},$$

wobei

$$\varphi^* = -\frac{2}{a^4+b^2}(a\log r + b\,\vartheta) + \varphi_0^*$$

ist. Die Sterne lassen wir im Folgenden aus.

Methoden für die numerische Berechnung der p-Funktion findet man z. B. in Halphen: Traité des fontions elliptiques, Paris, 1886, Kap. IV und Kap. VIII. Es gilt z. B. die Reihenentwicklung

$$p\,(x \mid 0, -1) = \frac{1}{x^2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 7} + \frac{x^{10}}{2^4 \cdot 7^2 \cdot 13} - \frac{x^{16}}{2^6 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 19} + \frac{3\,x^{22}}{2^8 \cdot 5 \cdot 7^4 \cdot 13^2 \cdot 19} - \frac{x^{28}}{2^8 \cdot 5 \cdot 7^5 \cdot 13^2 \cdot 19 \cdot 31} + \frac{43\,x^{34}}{2^{12} \cdot 7^5 \cdot 13^3 \cdot 19^2 \cdot 31 \cdot 37} - \frac{3 \cdot 431\,x^{40}}{2^{13} \cdot 5 \cdot 7^7 \cdot 13^3 \cdot 19^2 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43} + \ldots$$

[1]) Die Funktion u hat einen Pol n-ter Ordnung im Punkte φ_0, wenn die Reihenentwicklung $u\,\varphi = \sum_{s=-n}^{\infty} c_s\,(\varphi-\varphi_0)^s$ für hinreichend kleine Werte von $|\varphi-\varphi_0|$ konvergiert.

[2]) G. Mittag-Leffler, Acta mathematica, Bd. 18, S. 233, 1894.

Ergebnis der Integration. Die Geschwindigkeit in einem Punkte mit den polaren Koordinaten r und ϑ hat nach Hamel die Größe $\frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{u}{r}$, Die Richtung fällt mit der Tangente derjenigen Spirale der Form (1) zusammen, die durch den betreffenden Punkt hindurch geht. Wenn wir die neue Konstante $\beta = b/a$ einführen, finden wir also für die Geschwindigkeit den Ausdruck:

$$v = \frac{2\,\nu}{\beta\sqrt{1+\beta^2}} \cdot \frac{1}{r}\left[\frac{1}{25} + \beta^2 + \frac{48}{25}\,z^2\,p\,(z+z_1 \mid 0, -1)\right] \quad . \quad (5),$$

wobei

$$z = \exp\left[\frac{4}{5}\,\frac{\log r + \beta\vartheta}{\sqrt{1+\beta^2}} + \varphi_1\right]$$

ist. φ_1 und z_1 sind Konstanten. β ist aus der Form der Spirale

$$\log r + \beta\,\vartheta = \text{Konst.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

bestimmt.

Tafel der Funktion $p\,(x \mid 0, -1)$.

$\frac{x}{\omega_2}$	p	$\frac{x}{\omega_2}$	p	$\frac{x}{\omega_2}$	p
0	∞	0,35	1,136099	0,70	− 0,088302
0,05	56,96156	0,40	0,845114	0,75	− 0,219644
0,10	14,24022	0,45	0,631578	0,80	− 0,345632
0,15	6,32817	0,50	0,461163	0,85	− 0,458858
0,20	3,55728	0,55	0,313769	0,90	− 0,549898
0,25	2,27159	0,60	0,177152	0,95	− 0,609288
0,30	1,56801	0,65	0,044168	1,00	− 0,629961

Für größere Werte von x erhält man p aus den Symmetrie- und Periodizitätsgleichungen

$$p\,(x \mid 0, -1) = p\,(2\,\omega_2 - x \mid 0, -1) = p\,(x + 2\,n\,\omega_2 \mid 0, -1)$$

wobei n eine ganze Zahl ist und ω_2 den Wert 2,64995813 hat.

Die physikalische Bedeutung des Ergebnisses.

Unser Ergebnis stellt eine ebene Strömung dar, die zwischen zwei festen Wänden abläuft, deren Querschnitt die Form von logarithmischen Spiralen hat (vergl. Abb. 1). Da zähe Flüssigkeiten an den Wänden haften, muß v an diesen gleich Null sein. Also entsteht die Frage: Wann wird der Ausdruck (5), der ja v darstellt, gleich Null? Diese Frage können wir mit hinreichender Genauigkeit durch eine graphische Konstruktion beantworten. In der Figur ist die Kurve

$$F(z) = \frac{1}{25} + \frac{48}{25}\,z^2\,p\,(z+z_1 \mid 0, -1) \quad (6)$$

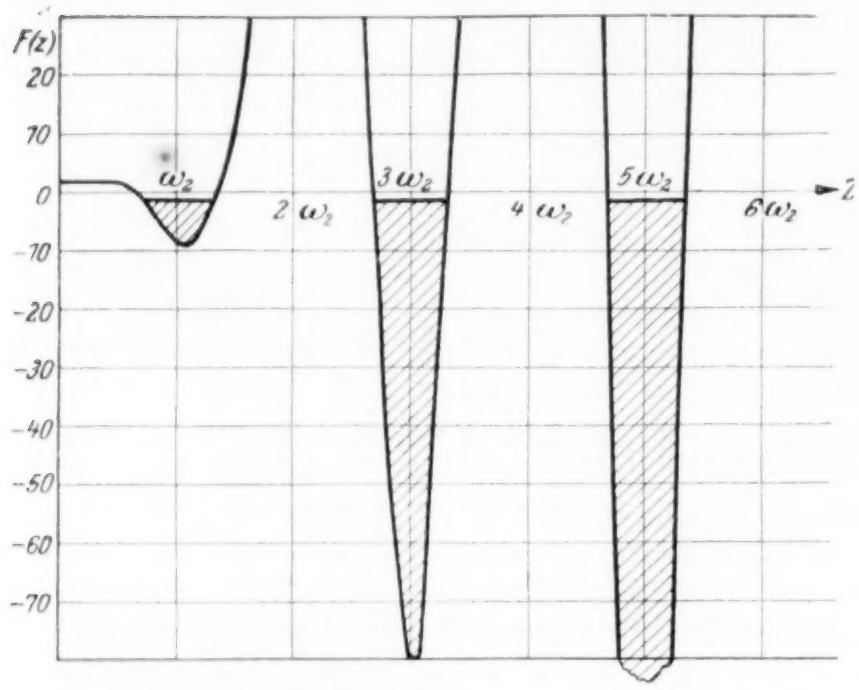
gezeichnet. Dabei wurde z_1 gleich Null gesetzt. Für jeden Wert von z_1 erhält man übrigens eine besondere Kurve $F(z)$ und daraus jedesmal neue Lösungen des Problems, welche von den übrigen Lösungen quantitativ, aber nicht qualitativ, verschieden sind.

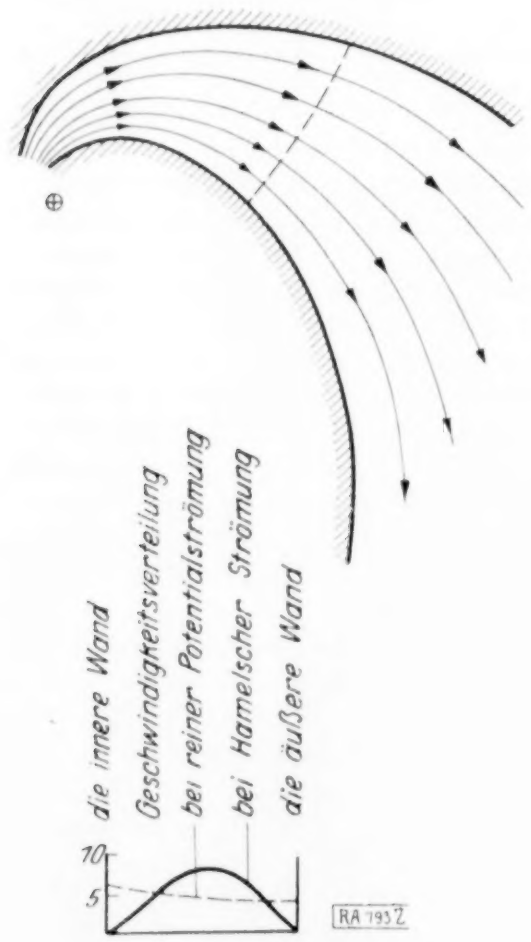
Dann wird nach (5)

$$v = \frac{2\,\nu}{\beta\sqrt{1+\beta^2}} \cdot \frac{1}{r}\,[\beta^2 + F(z)] \quad \ldots \quad (7)$$

mit

$$z = \exp\left[\frac{4}{5}\,\frac{\log r + \beta\vartheta}{\sqrt{1+\beta^2}} + \varphi_1\right] \ldots \quad (8).$$





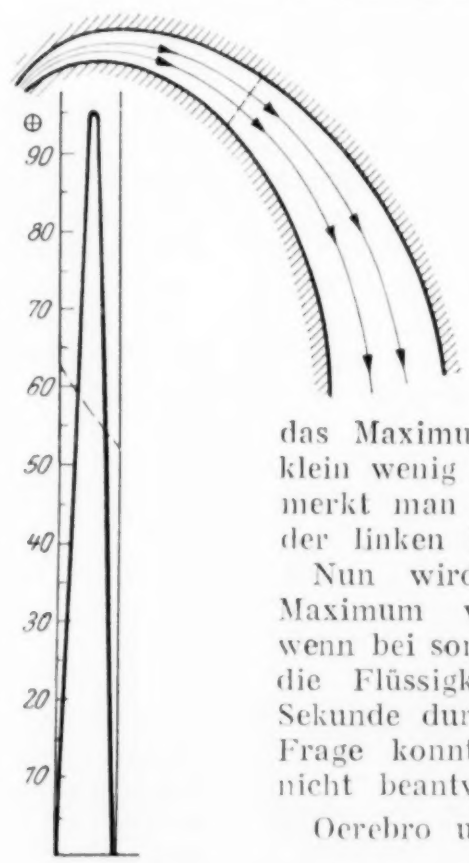


Abb. 1.

Also muß der Ausdruck $\beta^2 + F(z)$ an beiden Wänden verschieden sein. β ist gleich b/a und also aus der Form der Spiralen bekannt. Eine Gerade im Abstande β^2 unterhalb der z-Achse schneidet die Kurve in mehreren Punkten, die wir z_2, z_3, z_4 usw. nennen wollen. Nach (8) gibt nämlich $z = z_2$ eine logarithmische Spirale in der $r-\vartheta$-Ebene: die eine Wand. $z = z_3$ gibt eine zweite Spirale, die Schnittlinie der anderen Wand mit der $r-\vartheta$-Ebene. Die dazwischenliegenden Werte von z gehören dem Gebiet zwischen den Wänden an und geben uns, in (8) eingetragen, die Stromlinien. Da die Geschwindigkeit v zwischen den Wänden nicht unendlich werden kann, muß $F(z)$ nach (7) zwischen z_2 und z_3 im Endlichen verlaufen. Daher müssen z_2 und z_3 derselben Periode angehören.

In den Figuren wurde $\beta = 1$ gewählt. Die Gebiete der $F-z$-Ebene, welche einer möglichen Strömung entsprechen, wurden schraffiert. Die aus der ersten und zweiten Periode enthaltenen Strömungsformen sind durch Figuren veranschaulicht. In der linken Figur, welche aus der ersten Periode erhalten wurde, liegen die Wände recht weit getrennt. Einige Stromlinien sind eingezeichnet. An den folgenden Perioden erhält man immer engere Oeffnung zwischen den Wänden, je größer die Ordnungszahl der Periode ist. Dafür wird die Geschwindigkeit immer größer mit wachsender Ordnungszahl.

Die Verteilung der Geschwindigkeit über einen Querschnitt (in der Figur gestrichelt) senkrecht zu den Stromlinien ist unterhalb der betreffenden Strömungsfigur gezeichnet. Dabei bedeutet z. B. die Ordinate 10, daß die Geschwindigkeit gleich $10\,\nu$ cm pro Sekunde ist. Neben unserem Resultat (Hamelscher Strömung) ist auch die Potentialströmung der klassischen Theorie eingezeichnet. Bei dieser ist die Geschwindigkeit einfach der Entfernung vom Ursprung umgekehrt proportional (in der Strömungsfigur ist der Ursprung durch $\oplus$ bezeichnet.) Deshalb ist die Geschwindigkeit der Potentialströmung am größten an der inneren Wand. Wegen der Zentrifugalkraft ist es mehr plausibel, daß das Geschwindigkeitsmaximum in der Wirklichkeit der äußeren Wand näher liegt. In unseren Kurven liegt das Maximum beinahe in der Mitte, nur ein klein wenig nach außen verschoben. Auch bemerkt man eine kleine Einbiegung links auf der linken Kurve.

Nun wird man sich fragen, wie dieses Maximum verschoben und verändert wird, wenn bei sonst unveränderten Verhältnissen nur die Flüssigkeitsmenge größer wird, die pro Sekunde durch den Querschnitt strömt. Diese Frage konnte durch die obige Untersuchung nicht beantwortet werden.

Oerebro und Uppsala im Mai 1927.

Ol. Olsson. H. Faxén. 793

Charakteristische Eigenschaften von Membranblechen für Regelvorrichtungen und Instrumente. Die hohen Anforderungen, die heute an die Steuerungen von Kraftmaschinen gestellt werden und bei rasch vorkommenden Schwankungen gestellt werden müssen, zwingen ganz von selbst zu Konstruktionen von Regelorganen, deren ansprechender Teil mit sehr wenig Masse behaftet ist. Durch Zwischenschaltung von Membranen kann man in den meisten Fällen diesen Bedingungen gerecht wer-

den. In der Tat zeigen die besten heute auf dem Markte befindlichen Relais diese Aufgabe gelöst durch Anwendung von Membranen. Es sei hier nur an die bekannten Ausführungen der Askania-Werke und der Arca Regler A.-G. erinnert.

Um Anhaltspunkte für die Formgebung von Membranen für gewisse Dampfturbinensteuerungen zu gewinnen, wurden in der Frankfurter Maschinenbau A.-G. Versuche mit kleinen Membranen von gewöhnlichem Messingblech gemacht, deren charakteristische Ergebnisse im Folgenden kurz mitgeteilt seien.

Als Membran bezeichnet man gewöhnlich eine dünne Platte, deren Dicke im Verhältnis zum Durchmesser bezw. einer anderen Längenabmessung so klein ist, daß der Biegungswiderstand keine Rolle spielt. In allen Querschnitten treten dann nur reine Zugspannungen auf. Irgendwelche Momente, z. B. Einspannmomente usw., sind nicht vorhanden, bezw. die Membrane stellt sich so ein, daß dieselben nicht auftreten können. Obschon das Problem der dünnen Platte, bezw. einer dünnen Haut durch die interessanten Analogien auf dem Gebiete der Hydrodynamik, der Torsion, der Kapillarspannungen, der Spannungsfunktion der Festigkeitslehre usw. ein sehr dankbares Feld ist, finden sich über dem Spannungszustand eines derartigen Gebildes nur sehr spärliche Angaben in der Literatur. Die ersten Näherungsformeln scheint Föppel im Band V seines bekannten Werkes über technische Mechanik gegeben zu haben, während erst im Jahre 1915 eine genauere Rechnung von Henky[1]) angegeben wurde. Henky fand für die kreisförmige, dünne Platte mit gleichmäßig verteilter Belastung die exakte Lösung. Die Durchbiegung in der Mitte berechnet er zu

$$f = 0{,}662 \cdot r \sqrt[3]{\frac{p \cdot r}{E \cdot h}}.$$

Das bemerkenswerte an dieser Formel ist, daß im Gegensatz zu allen bekannten Problemen der Festigkeitslehre die Durchbiegung nicht proportional der Belastung ist[2]). Abb. 2 zeigt oberhalb der Kurve *e* die Punkte, die sich durch einen Belastungsversuch an einer Messingplatte von 0,32 mm ergaben, während die ausgezogene Kurve die nach obiger Formel berechnete darstellt. Die geringen Abweichungen sind einerseits in der unsicheren Kenntnis des genauen Elastizitätsmoduls sowie der nicht ganz einwandfreien Einspannung zu suchen. Die logarithmische Auftragung ergab hingegen dieselbe Potenz wie die Henkysche Formel, ein Beweis für die Brauchbarkeit der Formel.

Es ist klar, daß eine solche Charakteristik für Steuer-Membrane nicht sehr geeignet ist, da die Empfindlichkeit für kleine Belastungen übermäßig groß und mit steigender Belastung so schnell fällt, daß sie für die meisten Zwecke nicht mehr ausreicht.

Wie die folgenden Versuche zeigen, ist es sehr leicht, durch geeignete Formgebung ein proportionales Ansteigen der Durchbiegung mit der Belastung zu erhalten. Es ergibt sich, daß die Herstellung einer ganz geringen Wellentiefe genügt, um ein ungefähr proportionales Verhalten zu erzwingen. Der Grund dürfte darin zu suchen sein, daß bei einer glatten Membran durch eine gegebene Belastung ein biegungsfreier Zustand nur möglich ist, wenn der Neigungswinkel von außen nach innen stetig abnimmt. Nimmt man durch Formgebung nun eine kleine Aenderung dieser Winkel (bezw. Umkehr) vor, so müssen an dieser Stelle sofort große Momente auftreten. Die durch Momente bewirkte Deformation ist nun bekanntlich proportional der Belastung; z. B. hat eine am Rande eingespannte Membrane einen Biegungspfeil $f' = 0{,}17 \cdot \frac{p\,a^4}{E h^3}$. Gelingt es daher, durch geeignete Formgebung zu erreichen, daß die Deformation der Membrane hauptsächlich durch Momente erzeugt wird, so muß sich eine proportionale Abhängigkeit der Durchbiegung von der Belastung ergeben.

Das entsprechende eindimensionale Problem ist der durchlängende Telegraphendraht, d. h. der Träger mit kleiner Biegungssteifigkeit, für den das vorhin Gesagte mit sinngemäßer Uebertragung gilt, jedoch mangels irgendwelcher praktischen Anwendung ohne Interesse ist.

Das Verhalten von verschiedenen Membranen wurde mit einer einfachen Vorrichtung studiert. Eine Messingmembran wurde auf einen Rohrflansch befestigt und durch einen Bleidraht abgedichtet. Belastet wurde sie durch Druckluft, deren Spannung durch einen Drosselhahn genau eingestellt werden konnte. Die Feststellung des Druckes geschah mittels Wassersäule bezw. geeichtem Manometer für höhere Drücke. Die Durchbiegung wurde durch eine einfache Meßuhr mit $^1/_{100}$ mm Teilung gemessen. Sämtliche Membrane waren aus handelsüblichem Messingblech hergestellt und wurden aus einem Stück geschnitten, das eine mittlere Stärke von 0,32 mm hatte. Die Form der Membrane ist aus Abb. 1 zu erkennen. Die Bleche sind mit fünf konzentrischen Wellenringen versehen, die bei konstanter Wellenlänge verschiedene Eindrucktiefen haben. Dieselben waren 3,3; 1,5; 0,9; 0,6 mm.

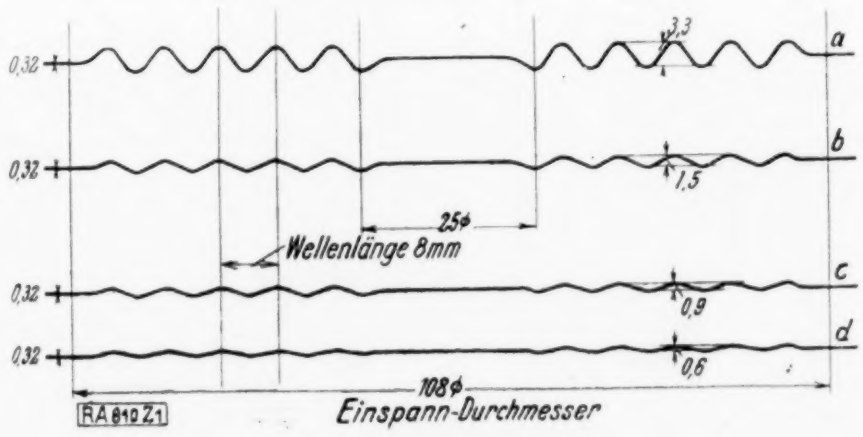


Abb. 1.

[1]) H. Henoky: »Ueber den Spannungszustand in kreisrunden Platten mit verschwindender Biegungssteifigkeit«, Zeitschr. f. Math. u. Physik Bd. 63 (1915), S. 311.

[2]) Dies ist darin begründet, daß die Differentialgleichung der Membran nicht linear ist.

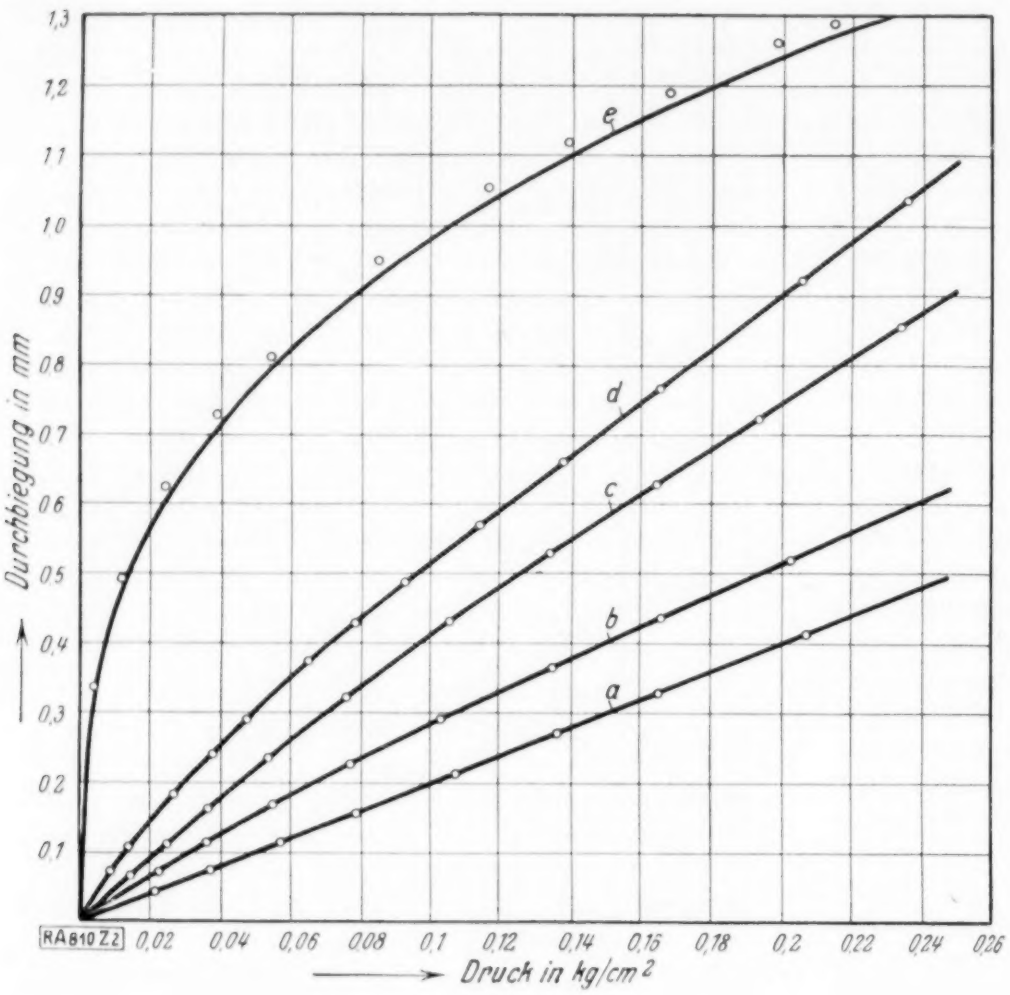


Abb. 2.

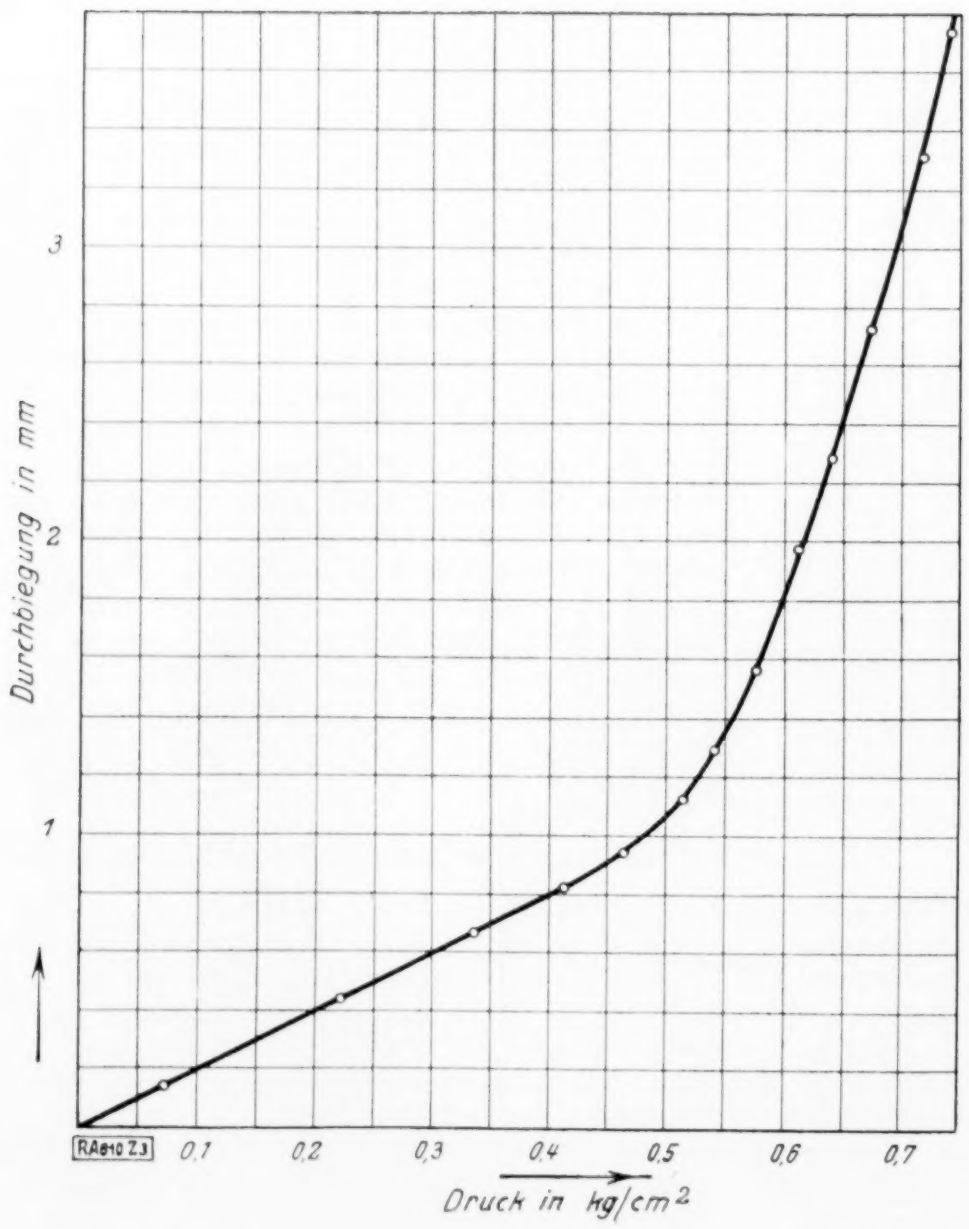


Abb. 3.

Die Versuchsergebnisse sind auf Abb. 2 zusammengestellt. Zum Vergleich ist auch die glatte Membran eingetragen. Man erkennt sofort den großen Einfluß der kleinen Verformungen auf die Charakteristik der Membrane. Eine Eindrucktiefe von 0,6 mm genügt beinahe schon, um eine lineare Charakteristik zu erhalten. Mit steigender Eindrückung nähern sich die Kurven mit einer immer größeren Annäherung der geraden Linie. Bei 3,3 mm war keine Abweichung von der Geraden mehr zu erkennen. Allerdings nimmt man hiermit auch eine Versteifung und eine geringere Empfindlichkeit mit in Kauf. Um letzteres zu vermeiden, wird man im allgemeinen lieber eine etwas gebogene Kurve, wie z. B. für 0,6 mm, vorziehen. So zeigen auch fast alle in der Praxis vorgefundenen Membrane ähnliche Formen, d. h. Membrane mit nur ganz schwacher Eindrückung.

Es leuchtet ein, daß mit derartigen Wellenformen versehene Membranen bei gewissen Belastungen instabil werden; die Wellen werden einfach ausknicken und die Membranen unbrauchbar machen. Diese Erscheinung wurde genauer untersucht. In Abb. 3 ist eine derartige Versuchskurve von der Membran *a* aufgezeichnet. Bis ca. 0,5 atü erkennt man linearen Anstieg, dann ein ziemlich plötzliches Abbiegen, das durch kurz hintereinander eintretendes Ausknicken von zwei Wellen entstand. Für die Membranen mit kleinerer Wellentiefe trat dieses Einknicken viel früher ein, z. B. bei *d* schon bei 0,3 atü. Hieraus ergibt sich, daß für große Verformungen die Empfindlichkeit zwar gering ist, die Festigkeit jedoch wesentlich höher wie bei kleinen Eindrückungen.

Zusammenfassung: Die Charakteristik einer glatten Membrane ist eine stark gekrümmte Linie und in den meisten Fällen für Instrumente und Regelorgane unbrauchbar. Versuche ergaben, daß eine mit Wellen versehene Membrane diese Eigenschaft nicht hat. Man erhält ziemlich genau eine lineare Charakteristik, die schon bei sehr geringen Eindrückungen entsteht. Größere Eindrückungen sind unzweckmäßig, da der Biegungswiderstand durch diese Maßnahme unnötig verstärkt wird. Bruno Eck.

Frankfurt/M., Juni 1927. 810

Ein Verfahren zur harmonischen Analyse.

1. In einer Fourierschen Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

kann man jedes Paar Koeffizienten a_ν, b_ν als Komponenten je eines Vektors in einer Ebene E, zugleich auch als reellen und als imaginären Teil einer in der Ebene dargestellten komplexen Zahl auffassen. Dann gelten bekanntlich die Beziehungen:

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu e^{i\nu x} \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

$$a_\nu = \frac{1}{2}(a_\nu - i\, b_\nu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\nu x} f(x)\, dx \quad . \quad (2),$$

$$\left.\begin{aligned} a_\nu &= a_\nu + a_{-\nu} \\ b_\nu &= i\,(a_\nu - a_{-\nu}) \end{aligned}\right\} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \begin{matrix}\cos \nu x \\ \sin \nu x\end{matrix} dx \quad . \quad (3).$$

Den Gegenstand der folgenden Ausführungen bildet die Berechnung der Koeffizienten mit $\nu \neq 0$ für eine numerisch oder graphisch gegebene Funktion $f(x)$, die die Periode 2π besitzt.

2. Wir denken uns das Stück vom beliebig gewählten Punkte x_0 bis $x_n = x_0 + 2\pi$ durch eine Reihe von Punkten $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ in n Abschnitte geteilt und $f(x)$ in jedem Abschnitte $x_\varkappa \leqq x \leqq x_{\varkappa+1}$ durch eine analytische Funktion $\varphi_\varkappa(x)$ näherungsweise ersetzt. Weiters sei auch

$$x_{\varkappa \pm n} = x_\varkappa \pm 2\pi \text{ und } \varphi_{\varkappa \pm n}(x) = \varphi_\varkappa(x \mp 2\pi) \quad (4).$$

Es ist zulässig, die unbestimmten Integrale

$$\int e^{-i\nu x} \varphi_\varkappa(x)\, dx = e^{-i\nu x} \Phi_{\varkappa,\nu}(x) + \text{konst.} \quad (5),$$

so auszudrücken, wie dies hier rechts vom Gleichheitszeichen geschehen ist. Bei dieser Schreibweise enthält $\Phi_{\varkappa,\nu}(x)$ einen unbestimmten Summanden von der Form $C_{\varkappa,\nu} e^{i\nu x}$, wo $C_{\varkappa,\nu}$ eine willkürliche Konstante ist, die in die Integrationskonstante des obigen unbestimmten Integrals eingeht. Die Funktionen $\Phi_{\varkappa,\nu}(x)$ sind hier beliebige Integrale z der Differentialgleichungen

$$z' = i\nu z + \varphi_\varkappa(x).$$

Deutet man x als Zeit, z als einen Punkt der Ebene E, so ist aus der in der Form

$$z' = i\nu\left[z - \frac{i}{\nu}\varphi_\varkappa(x)\right]$$

geschriebenen Differentialgleichung ersichtlich, daß sich z mit der Winkelgeschwindigkeit ν um den Punkt $\frac{i}{\nu}\varphi_\varkappa(x)$ in der Ebene E dreht. Da dies zur Zeit x für alle Punkte z der Ebene gilt, beschreibt jeder Punkt z eine der Rollkurven, die durch die Momentanzentren $i\frac{\varphi_\varkappa(x)}{\nu}$ und die Winkelgeschwindigkeit ν bestimmt sind. Ist z. B. $\varphi_\varkappa(x)$ linear, so beschreibt z eine Trochoide, bei der ein mit z fest verbundener Kreis mit dem Halbmesser $\frac{\varphi_\varkappa'(x)}{\nu^2}$ auf der i-Achse abrollt.

Für jeden Abschnitt $x_\varkappa$, $x_{\varkappa+1}$ denken wir uns eine beliebige der zugehörigen Funktionen $\Phi_{\varkappa,\nu}(x)$ ausgewählt und beibehalten. Entsprechend der Festsetzung (4) sei auch

$$\Phi_{\varkappa \pm n,\nu}(x) = \Phi_{\varkappa,\nu}(x \mp 2\pi) \quad \ldots \quad (6)$$

angenommen.

Wird die Bezifferung der $x_\varkappa$ so geregelt, daß $x_0 \leqq 0 < x_1$ und dementsprechend $x_n \leqq 2\pi < x_{n+1}$ ist, so wird annähernd

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\nu x} f(x)\, dx = \int_0^{x_1} e^{-i\nu x} \varphi_0(x)\, dx$$

$$+ \sum_{\varkappa=1}^{n-1} \int_{x_\varkappa}^{x_{\varkappa+1}} e^{-i\nu x} \varphi_\varkappa(x)\, dx + \int_{x_n}^{2\pi} e^{-i\nu x} \varphi_n(x)\, dx$$

$$= e^{-i\nu x_1} \Phi_{0,\nu}(x_1) - \Phi_{0,\nu}(0) + \sum_{\varkappa=1}^{n-1} [\Phi_{\varkappa,\nu}(x_{\varkappa+1})$$

$$- \Phi_{\varkappa,\nu}(x_\varkappa)] + \Phi_{n,\nu}(2\pi) - e^{-i\nu x_n} \Phi_{n,\nu}(x_n).$$

Nach (6) ist

$$\Phi_{n,\nu}(2\pi) = \Phi_{0,\nu}(0);$$

daher kann man die vorstehende Summe auch schreiben

$$\int_0^{2\pi} e^{-i\nu x} f(x)\, dx = \sum_{\varkappa=1}^{n} e^{-i\nu x_\varkappa} [\Phi_{\varkappa-1,\nu}(x_\varkappa) - \Phi_{\varkappa,\nu}(x_\varkappa)].$$

Drückt man die Differenz

$$\Phi_{\varkappa-1,\nu}(x_\varkappa) - \Phi_{\varkappa,\nu}(x_\varkappa) = \Phi_\nu \Big|_{x_\varkappa + 0}^{x_\varkappa - 0} \quad . \quad (7)$$

durch das hier rechts angeschriebene Zeichen aus, so wird in (2)

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi} \sum_{\varkappa=1}^{n} e^{-i\nu x_\varkappa} \Phi_\nu \Big|_{x_\varkappa + 0}^{x_\varkappa - 0} \quad \ldots \quad (8).$$

Ist z. B.

$$f(x) = |\sin x|, \quad n = 2, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \pi,$$

$$x_2 = 2\pi, \quad \varphi_0(x) = \sin x, \quad \varphi_1(x) = -\sin x,$$

so ergibt sich für $\nu \neq 1$ mit

$$\Phi_{0,\nu}(x) = -\Phi_{1,\nu}(x) = \frac{1}{\nu^2 - 1}(\cos x + i\nu \sin x):$$

$$\Phi \Big|_{x_1 + 0}^{x_1 - 0} = \Phi_{0,\nu}(\pi) - \Phi_{1,\nu}(\pi) = -\frac{2}{\nu^2 - 1},$$

$$\Phi \Big|_{x_2 + 0}^{x_2 - 0} = \Phi_{1,\nu}(2\pi) - \Phi_{0,\nu}(0) = -\frac{2}{\nu^2 - 1}.$$

Dies, in Verbindung mit $e^{-i\nu x_1} = (-1)^\nu$, $e^{-i\nu x_2} = 1$, gibt: $a_\nu = a_{-\nu} = \frac{-1}{\pi(\nu^2 - 1)}[(-1)^\nu + 1]$,

$$a_{2\mu} = -\frac{4}{\pi(4\mu^2 - 1)}, \quad a_{2\mu+1} = 0, \quad b_\nu = 0.$$

3. Benutzt man als Näherungsfunktionen $\varphi_\varkappa(x)$ Polynome $p_\varkappa(x)$, so erhält man mit Hilfe der durch wiederholte teilweise Integrationen entstehenden Formel:

$$\int u\, v\, dx = u\, v^{(-1)} - u'\, v^{(-2)} + \ldots$$

$$(-1)^{n-1} u^{(n-1)}\, v^{(-n)} + (-1)^n \int u^{(n)}\, v^{(-n)}\, dx$$

mit

$$u = p_\varkappa(x), \quad v = e^{-i\nu x}$$

die Gleichung

$$\int e^{-i\nu x} p_\varkappa(x)\,dx = e^{-i\nu x} P_{\varkappa,\nu}(x) + \text{Konst.},$$

in der

$$P_{\varkappa,\nu}(x) = i\,Q_{\varkappa,\nu}(x) + R_{\varkappa\nu}(x) = i\left(\frac{1}{\nu}p'_\varkappa(x) - \frac{1}{\nu^3}p_\varkappa''(x) + \ldots\right) + \left(\frac{1}{\nu^2}p_\varkappa'(x) - \frac{1}{\nu^4}p_\varkappa''' + \ldots\right) \quad (9)$$

an der Stelle von $\Phi_{\varkappa,\nu}(x)$ der Gleichung (5) für das Intervall $x_\varkappa,\ x_{\varkappa+1}$ angenommen sei.

Die in (9) auftretenden Reihen sind endlich.

Bei abschnittsweiser Approximation von $f(x)$ durch Polynome $p_\varkappa(x)$ wird demnach

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi}\sum_{\varkappa=1}^{n} e^{-i\nu x_\varkappa} P_\nu(x)\Big|_{x_\varkappa+0}^{x_\varkappa-0} \quad \ldots \quad (10),$$

wobei

$$P_\nu(x) = P_{\varkappa,\nu}(x) \text{ für } x_\varkappa \gtreqless x \gtreqless x_{\varkappa+1} \text{ ist}$$

4. Für eine stetige Funktion $f(x)$ ergibt sich ein leicht durchzuführendes Verfahren, wenn man die Länge aller Intervalle

$$x_{\varkappa+1} - x_\varkappa = h = \frac{2\pi}{n}$$

macht und $f(x)$ in jedem solchen Abschnitt durch eine lineare Funktion, etwa durch

$$p_\varkappa(x) = f(x_\varkappa) + \frac{\Delta_\varkappa}{h}x \text{ mit } \Delta_\varkappa = f(x_{\varkappa+1}) - f(x_\varkappa),$$

oder die zu analysierende Kurve durch das Sehnenpolygon über den äquidistanten Punkten $x_\varkappa$ näherungsweise ersetzt. Dann wird

$$P_\nu(x)\Big|_{x_\varkappa+0}^{x_\varkappa-0} = \frac{1}{\nu^2}[p_{\varkappa-1}'(x_\varkappa) - p_\varkappa'(x_\varkappa)] = \frac{1}{h\nu^2}(\Delta_{\varkappa-1} - \Delta_\varkappa) = -\frac{n}{2\pi\nu^2}\Delta^2{}_{\varkappa-1},$$

$$a_\nu = -\frac{n}{(2\pi\nu)^2}\sum_{\varkappa=1}^{n} e^{-i\nu x_\varkappa}\Delta^2{}_{\varkappa-1} \quad (11)$$

und nach (3)

$$\left.\begin{matrix} a_\nu \\ b_\nu \end{matrix}\right\} = -\frac{n}{2(\pi\nu)^2}\sum_{\varkappa=1}^{n}\Delta^2{}_{\varkappa-1}\begin{matrix}\cos\nu x_\varkappa \\ \sin\nu x_\varkappa\end{matrix}. \quad (12).$$

Diese Summe kann in ähnlicher Weise ausgewertet werden, wie die bekannten Formeln

$$\left.\begin{matrix} a_\nu \\ b_\nu \end{matrix}\right\} = \frac{2}{n}\sum_{\varkappa=1}^{n} f(x_\varkappa)\begin{matrix}\cos\nu x_\varkappa \\ \sin\nu x_\varkappa\end{matrix}$$

nach den Verfahren, die z. B. in Willers, Numerische Integration (Sammlung Göschen), oder in Hort, Technische Schwingungslehre, und in anderen Werken beschrieben sind.

Zur graphischen Auswertung der Formel (11) kann man die n Vektoren, die die Beträge $\Delta^2{}_{\varkappa-1}|$ und für $\Delta_\varkappa{}^2 \gtreqless 0$ die Richtungen $\mp e^{-i\nu x_\varkappa}$ haben, aneinanderreihen. Die Summe, mit $n/(2\pi\nu)^2$ multipliziert, gibt den Vektor α_ν und nach (3) die Komponenten a_ν und b_ν.

Nimmt man z. B. $x_0 = 0$, $n = 12$ und die reelle Achse aufwärts gerichtet an, und bezeichnet man die Richtungen 1, $e^{-\frac{i\pi}{6}}$, $e^{-\frac{2i\pi}{6}}$ ... mit XII, I, II ... wie auf dem Ziffernblatt einer Uhr, so sind die Richtungen der Vektoren $-e^{-i\nu x_\varkappa}\Delta^2{}_{\varkappa-1}$ der folgenden Tafel zu entnehmen.

ν	1		2		3		4		5		
$\varkappa$	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	
1	I	VII	II	VIII	III	IX	IV	X	V	XI	
2	II	VIII	IV	X	VI	XII	VIII	II	X	IV	
3	III	IX	VI	XII	IX	III	XII	VI	III	IX	
4	IV	X	VIII	II	XII	VI	IV	X	VIII	II	usw.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
11	XI	V	X	IV	IX	III	VIII	II	VII	I	
12	XII	VI	XII	VI	XII	VI	XII	VI	XII	VI	

Für das Auftragen der Winkel genügt bei $n = 12$ ein 30,60 grädiges Zeichendreieck, bei $n = 24$ nach einem ähnlichen Schema ein 30,60 grädiges in Verbindung mit einem 45 grädigen.

5. Im folgenden ersetzen wir eine stetige Funktion $f(x)$ in je je zwei benachbarten Intervallen

$$x_{2\lambda},\quad x_{2\lambda+1} = x_{2\lambda} + h,\quad x_{2\lambda+2} = x_{2\lambda} + 2h$$

durch jenes Polynom 2. Grades $p_{2\lambda}(x)$, das an den drei genannten Stellen dieselben Werte annimmt wie $f(x)$, dem entsprechend die zu analysierende Kurve durch $n/2$ Parabelbögen, deren jeder durch je drei Punkte $(x_{2\lambda},\ y_{2\lambda})$, $(x_{2\lambda+1},\ y_{2\lambda+1})$, $(x_{2\lambda+2},\ y_{2\lambda+2})$ der Kurve hindurchgeht. Dann ist unter Benutzung einer bekannten Formel:

$$p_{2\lambda}(x) = p_{2\lambda+1}(x) = f(x_{2\lambda}) + \frac{\Delta_{2\lambda}}{h}(x - x_{2\lambda}) + \frac{\Delta^2{}_{2\lambda}}{2h^2}(x - x_{2\lambda})(x - x_{2\lambda+1}) \quad \ldots \quad (13).$$

Zufolge der Gleichung (9) wird hier:

$$P_\nu(x)\Big|_{x_{2\lambda+1}+0}^{x_{2\lambda+1}-0} = 0$$

und

$$P_\nu(x)\Big|_{x_{2\lambda}+0}^{x_{2\lambda}-0} = \frac{1}{\nu^2}[p'_{2\lambda-2}(x_{2\lambda}) - p'_{2\lambda}(x_{2\lambda})] - \frac{i}{\nu^3}[p''_{2\lambda-2}(x_{2\lambda}) - p''_{2\lambda}(x_{2\lambda})].$$

Mit Hilfe der Gleichung (13) und der entsprechenden Gleichung für die Intervalle $x_{2\lambda-2}$, $x_{2\lambda-1}$, $x_{2\lambda}$ findet man

$$p''_{2\lambda}(x_{2\lambda}) = \frac{\Delta^2{}_{2\lambda}}{h^2}, \qquad p''_{2\lambda-2}(x_{2\lambda}) = \frac{\Delta^2{}_{2\lambda-2}}{h^2}$$

und

$$p'_{2\lambda}(x_{2\lambda}) = \frac{\Delta_{2\lambda}}{h} - \frac{\Delta^2{}_{2\lambda}}{2h},$$

$$p'_{2\lambda-2}(x_{2\lambda}) = \frac{\Delta_{2\lambda-1}}{h} + \frac{\Delta^2{}_{2\lambda-2}}{2h}.$$

Die weiter oben benötigte Differenz der beiden letzten Ausdrücke ist

$$p'_{2\lambda-2}(x_{2\lambda}) - p'_{2\lambda}(x_{2\lambda}) = \frac{1}{h}(\Delta_{2\lambda-1} - \Delta_{2\lambda}) + \frac{1}{2h}(\Delta^2{}_{2\lambda-2} + \Delta^2{}_{2\lambda}) = \frac{1}{2h}(\Delta^2{}_{2\lambda} - 2\Delta^2{}_{2\lambda-1} + \Delta^2{}_{2\lambda-2}) = \frac{1}{2h}\Delta^4{}_{2\lambda-2}.$$

Nach diesen Zwischenrechnungen erhält man

$$P_\nu \begin{vmatrix} x_2\lambda - 0 \\ x_2\lambda + 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\,h\,\nu^2}\,\Delta^4{}_{2\lambda-2} + \frac{i}{h^2\,\nu^3}\,(\Delta^2{}_{2\lambda} - \Delta^2{}_{2\lambda-2})$$

und auf Grund der Gleichung (10)

$$a_\nu = \frac{n}{8\,(\pi\,\nu)^2} \sum_{\lambda=1}^{n/2} e^{-i\nu x_{2\lambda}}\,\Delta^4{}_{2\lambda-2} + \frac{i\,n^2}{8\,(\pi\,\nu)^3} \sum_{\lambda=1}^{n/2} e^{-i\nu x_{2\lambda}}\,(\Delta^2{}_{2\lambda} - \Delta^2{}_{2\lambda-2})$$

Da man dasselbe Verfahren auch auf die Paare von Intervallen $x_{2\lambda-1}$, $x_{2\lambda}$, $x_{2\lambda+1}$ anwenden kann, kann man schreiben:

$$a_\nu = \frac{n}{8\,(\pi\nu)^2} \sum_{\varkappa} e^{-i\nu x_\varkappa}\,\Delta^4{}_{\varkappa-2} + i\,\frac{n^3}{8\,(\pi\,\nu)^3} \sum_{\varkappa} e^{-i\nu x_\varkappa}\,(\Delta_\varkappa{}^2 - \Delta^2{}_{\varkappa-2}) \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

und

$$\left.\begin{matrix} a_\nu \\ b_\nu \end{matrix}\right\} = \frac{n}{4\,(\pi\,\nu)^2} \sum_{\varkappa} \Delta^4{}_{\varkappa-2} \begin{matrix} \cos \nu\,x_\varkappa \\ \sin \nu\,x_\varkappa \end{matrix} + \frac{n^2}{-\,4\,(\pi\,\nu)^3} \sum_{\varkappa} (\Delta_\varkappa{}^2 - \Delta^2{}_{\varkappa-2}) \begin{matrix} \sin \nu\,x_\varkappa \\ \cos \nu\,x_\varkappa \end{matrix} \quad (15).$$

mit $\varkappa = 2, 4, 6 \ldots n$, oder mit $\varkappa = 1, 3, 5 \ldots (n-1)$.

Für $x_0 = 0$ hat die Summierung über $\varkappa = 2, 4, 6 \ldots n$ im besonderen bei $n = 24$ den Vorteil, daß an Winkelfunktionen nur solche mit den Beträgen 0, $^1/_2$, $\sin 60^0$ und 1 vorkommen, während sonst bei $n = 24$ außerdem noch Multiplikationen mit den Beträgen der sin von 15, 45 und 75^0 hinter den Summenzeichen auftreten.

6. Hat $f(x)$ die Symmetrieeigenschaften einer geraden oder einer ungeraden Funktion, so daß mit geradem oder mit ungeradem l die Gleichungen

$$f(2\,\pi - x) = (-1)^l\,f(x) \qquad \text{und}$$
$$f(\pi + x) = (-1)^l\,f(\pi - x) \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

bestehen, so sind bekanntlich

$$\text{alle } b_\nu = 0 \text{ oder alle } a_\nu = 0.$$

In diesen beiden Fällen sei

$$n = 2\,m,\ x_0 = 0,\ x_m = \pi,\ x_{2m} = 2\,\pi.$$

Die nicht den Winkeln $\nu\,x_m$ und $\nu\,x_{2m}$ entsprechenden Glieder der Summen in (12) und in (15) haben paarweise die gleichen Beträge. Hierzu treten noch in den über $\varkappa = 1, 2, 3 \ldots n$ und in den über $\varkappa = 2, 4, 6 \ldots n$ erstreckten Summen, die den genannten Winkeln entsprechenden Glieder. Hiernach übergehen die Formeln 12 und 15 in

$$a_\nu = -\frac{n}{(\pi\,\nu)^2} \left(\sum_{\varkappa=1,2,3..}^{m-1} \Delta^2{}_{\varkappa-1} \cos \nu\,x_\varkappa + {}^1/_2\,[(-1)^\nu\,\Delta^2{}_{m-1} + \Delta_{-1}{}^2] \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).,$$

$$b_\nu = -\frac{n}{(\pi\,\nu)^2} \sum_{\varkappa=1,2,3..}^{m-1} \Delta_{\varkappa-1} \sin \nu\,x_\varkappa \quad . \quad . \quad (18).$$

und in

$$a_\nu = \frac{n}{2\,(\pi\,\nu)^2} \left(\sum_{\varkappa=2,4..}^{m-2} \Delta^4{}_{\varkappa-2} \cos \nu\,x_\varkappa + {}^1/_2\,[(-1)^\nu\,\Delta^4{}_{m-2} + \Delta^4{}_{-2}] \right) + \frac{n^2}{2\,(\pi\,\nu)^3} \sum_{\varkappa=2,4..}^{m-2} (\Delta_\varkappa{}^2 - \Delta^2{}_{\varkappa-2}) \sin \nu\,x_\varkappa \quad (19),$$

$$b_\nu = \frac{n}{2\,(\pi\,\nu)^2} \sum_{\varkappa=2,4..}^{m-2} \Delta^4{}_{\varkappa-2} \sin \nu\,x_\varkappa - \frac{n^2}{2\,(\pi\,\nu)^3} \left(\sum_{\varkappa=2,4..}^{m-2} (\Delta_\varkappa - \Delta_{\varkappa-2}) \cos \nu\,x_\varkappa + {}^1/_2\,[(-1)^\nu\,(\Delta_m{}^2 - \Delta^2{}_{m-2}) + (\Delta_0{}^2 - \Delta^2{}_{-2}] \right) \quad (20).$$

Statt über $\varkappa = 2, 4, 6 \ldots (m-2)$ kann man die Summen in (19) und (20) über $\varkappa = 1, 3, 5 \ldots (m-1)$ nehmen. Dann entfallen die Ausdrücke in den eckigen Klammern.

Hat $f(x)$ beiderlei Symmetrieeigenschaften, so gelten außer den Gleichungen (16) noch die folgenden:

$$f(\pi - x) = (-1)^{l+1} f(x),$$
$$f(\pi/2 + x) = (-1)^{l+1} f(\pi/2 - x).$$

Dann ist bekanntlich bei geradem oder bei ungeradem l

$$b_\nu = 0,\ a_{2\mu} = 0 \text{ oder } a_\nu = 0,\ b_{2\mu} = 0;$$
$$\mu = 1, 2, 3 \ldots,\ \nu = 1, 2, 3 \ldots.$$

Macht man dann

$$n = 4\,r,\ x_0 = 0,\ x_r = \pi/2,$$
$$x_{2r} = \pi,\ x_{3r} = 3\,\pi/2,\ x_{4r} = 2\,\pi,$$

so werden, auf Grund einer ähnlichen Ueberlegung wie vorhin, die nicht verschwindenden Koeffizienten:

$$\left.\begin{matrix} a_\nu \\ b_\nu \end{matrix}\right\} = -\frac{8\,r}{(\pi\,\nu)^2} \left(\sum_{\varkappa=1,2..}^{r-1} \Delta^2{}_{\varkappa-1} \begin{matrix} \cos \nu\,x_\varkappa \\ \sin \nu\,x_\varkappa \end{matrix} + {}^1/_2 \left\{ \begin{matrix} \Delta^2{}_{-1} \\ \Delta^2{}_{r-1} \sin \nu\,\pi/2 \end{matrix} \right\} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

$$\left.\begin{matrix} a_\nu \\ b_\nu \end{matrix}\right\} = \frac{4\,r}{(\pi\,\nu)^2} \left(\sum_{\varkappa=2,4..}^{r-2} \Delta^4{}_{\varkappa-2} \begin{matrix} \cos \nu\,x_\varkappa \\ \sin \nu\,x_\varkappa \end{matrix} + {}^1/_2 \left\{ \begin{matrix} \Delta^4{}_{-2} \\ \Delta^4{}_{r-2} \sin \nu\,\pi/2 \end{matrix} \right\} \right) \pm \frac{(4\,r)^2}{(\pi\,\nu)^3} \left(\sum_{\varkappa=2,4..}^{r-2} (\Delta^2{}_\varkappa - \Delta^2{}_{\varkappa-2}) \begin{matrix} \sin \nu\,x_\varkappa \\ \cos \nu\,x_\varkappa \end{matrix} + {}^1/_2 \left\{ \begin{matrix} (\Delta^2{}_r - \Delta^2{}_{r-2}) \sin \nu\,\pi/2 \\ (\Delta^2{}_0 - \Delta^2{}_{-2} \end{matrix} \right\} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Nimmt man die Summen in (22) über $\varkappa = 1, 3, \ldots r-1$, so entfallen die in den Doppelklammern stehenden Ausdrücke.

7. Als Anwendungsbeispiel sei auf Grund von (22) ein Schema zur Berechnung von b_1, b_3, b_5 und b_7 für eine hinsichtlich 0 und π ungerade, hinsichtlich $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\,\pi}{2}$ gerade Funktion $y = f(x)$ entworfen.

Sind y_1 bis y_6 für $x_1, x_2 \ldots x_6 = 15^0, 30^0, \ldots 90^0$ gegeben, so bilde man die Differenzen:

$y_0 = 0$	Δ_0	$\Delta_0{}^2$	$\Delta_0{}^3$		
y_1	Δ_1	$\Delta_1{}^2$	$\Delta_1{}^3$	$\Delta_0{}^4 = p_2$	$\Delta_2{}^2 - \Delta_0{}^2 = q_2$
y_2	Δ_2	$\Delta_2{}^2$	$\Delta_2{}^3$	$\Delta_2{}^4 = p_4$	$\Delta_4{}^2 - \Delta_2{}^2 = q_4$
y_3	Δ_3	$\Delta_3{}^2$	$\Delta_3{}^3$		
y_4	Δ_4	$\Delta_4{}^2$			
y_5	Δ_5				
y_6					

Weiteres berechne man:

$$p_4' = p_4 \cos 30^0, \quad q_2' = q_2 \cos 30^0$$

$$\text{und} \quad \Delta_4{}^3 = -2\,\Delta_5 - \Delta_4{}^2$$

dann ist:

$$\left.\begin{aligned} b_1 &= 2{,}4317\,(1/2\,p_2 + p_4' - \Delta_4{}^3) \\ &\quad - 18{,}5768\,(\Delta_0{}^2 + q_2' + 1/2\,q_4) \\ b_3 &= 0{,}2702\,(p_2 + \Delta_3{}^4) \\ &\quad - 0{,}6880\,(\Delta^2{}_0 - q_4) \\ b_5 &= 0{,}0973\,(1/2\,p_2 - p_4' - \Delta_4{}^3) \\ &\quad - 0{,}1486\,(\Delta_0{}^2 - q_2' + 1/2\,q_4) \\ b_7 &= 0{,}0496\,(-1/2\,p_2 + p_4' + \Delta_4{}^3) \\ &\quad - 0{,}0542\,(\Delta_2{}^0 - q_2' + 1/2\,q_4) \end{aligned}\right\}. \quad (23).$$

Wegen der Symmetrieeigenschaften von $f(x)$ ist hier $\Delta^4{}_{r-2} = \Delta_4{}^4 = -2\,\Delta_4{}^3$; deshalb wurde in den vorstehenden Gleichungen $-\Delta_4{}^3$ statt $1/2\,\Delta_4{}^4$ der Formel (22) verwendet.

Für das Zahlenbeispiel, das in der weiter unten folgenden Tabelle ausgeführt ist, wurden die Werte von

$$f(x) = 10 \sin x - \sin 3x + 0{,}5 \sin 5x$$

für $x = 0,\ 15^0 \ldots 90^0$ als gegebene Werte von y_0 bis y_6 angenommen.

Die Rechnung ergab

$$b_1 = 9{,}99 \quad b_3 = -0{,}99 \quad b_5 = 0{,}48 \quad b_7 = 0{,}035.$$

Die Klammerausdrücke aus (23) sind in der Tabelle mit b'_ν, b''_ν die zugehörigen Zahlenkoeffizienten mit k'_ν, k''_ν bezeichnet.

$\varkappa$	$x_\varkappa$	$y_\varkappa$	$\Delta_\varkappa$	$\Delta^2{}_{\varkappa-1}$	$\Delta^3{}_{\varkappa-1}$	$\Delta^4{}_{\varkappa-2}$	$\Delta^2{}_\varkappa - \Delta^2{}_{\varkappa-2}$
0	0	0					
			2,364				
1	15^0	2,364		$-0{,}478$			
			1,886		0,352		
2	30^0	4,250		$-0{,}126$		0,231	0,935
			1,760		0,583		
3	45^0	6,010		0,457			
			2,217		$-0{,}405$		
4	60^0	8,227		0,052		$-0{,}912$	$-1{,}722$
			2,269		$-1{,}317$		
5	75^0	10,496		$-1{,}265$			
			1,004		$-0{,}743$		
6	90^0	11,500		$-2{,}008$			

$\nu =$	1		3		5		7	
$p_2 = 0\ 231$	1/2	0,115	1	0,231	1/2	0.115	$-1/2$	
$p_4' = -0{,}790$	1	$-0{,}790$	0	—	-1	0,790	1	
$\Delta_4{}^3 = -0{,}743$	-1	0,743	1	$-0{,}743$	-1	0,743	1	
		0,858						
b_ν'		0,068		$-0{,}512$		1,648		$-1{,}648$
$\Delta_0{}^2 = -0{,}478$	1	$-0{,}478$	1	$-0{,}478$	1	$-0{,}478$	1	
$q_2' = 0{,}810$	1	0,810	0	—	-1	$-0{,}810$	-1	
$q_4 = -1{,}722$	1/2	$-0{,}861$	-1	1,722	1/2	$-0{,}861$	1/2	
		$-1{,}339$						
b_ν''		$-0{,}529$		1,244		$-2{,}149$		-2.149
$k_\nu' b_\nu'$		0,165		$-0{,}138$		0,1605		-0.0818
$k_\nu'' b_\nu''$		9,82		$-0{,}856$		0.319		0,1165
b_ν		9,99		$-0{,}99$		0,48		0,035
k_ν'		2,431		0,2702		0,0973		0,0496
k_ν''		$-18{,}58$		$-0{,}688$		$-0{,}1486$		$-0{,}0542$

Wien. Artur Nowakowski. 809

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

Dr.-Ing. G. **SACHS,** Mitarbeiter im Kaiser-Wilhelm-Institut für Metallforschung, Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin, und Dipl.-Ing. G. **FIEK,** Ständiges Mitglied im Materialprüfungsamt Dahlem. Der Zugversuch. Anleitung für die Ausführung und Auswertung der Versuche sowie für die Beurteilung der Ergebnisse. Mit 202 Abb. Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig 1926. VII + 252 S. Preis geb. 15 M, brosch. 12 M.

Der Zugversuch bildet die bis zum heutigen Tage am meisten verbreitete Art, die Festigkeitseigenschaften eines Werkstoffes zu bestimmen.

Das vorliegende Buch enthält eine sehr vollständige Beschreibung aller Erfahrungen über den Zugversuch. Es behandelt aber darüber

hinaus eine Reihe von wichtigen Fragen aus der Mechanik, die mit den Vorgängen beim Zerreißen der dehnbaren Metalle zusammenhängen. Im ersten Teil: »Grundlagen des Zugversuches«, der ungefähr 3/4 des Buches ausmacht, berichtet G. Sachs über die elastischen Eigenschaften der Metalle, über die bleibenden Formänderungen, den praktischen Zerreißversuch, Dehnung, wahre Zugkurve, Bedeutung der Kennziffern, Kerbwirkungen, Bruchformen, zusammengesetzte Beanspruchung und kritische Zustände. Daran schließt sich ein kurzer Abschnitt über stoffliche Grundlagen, Aufbau von Metallkristallen, Eigenschaften von Kristallhaufwerken, Nachwirkung, Einfluß der Zeit und Temperatur. Der zweite Teil »Gesichtspunkte für die Auswahl der Apparatur beim Zerreißversuch«, dessen Verfasser G. Fiek ist, enthält eine Zusammenstellung der Prüfmaschinen, Meßapparate, Kraftmeßvorrichtungen und Hilfsgeräte für die in der Praxis üblichen Zugversuche.

Das kleine Buch erfüllt seinen Zweck, über die vorliegenden Grundlagen und wichtigsten Erfahrungen der Zerreißversuche zu orientieren, sehr gut. Es ist mit zahlreichen Lichtbildern ausgestattet, unter denen die lehrreichen Formen eingeschnürter Stäbe und der Bruchflächen besonders erwähnt seien.

Göttingen. A. Nádai. 357

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften. Herausgegeben von der Schriftleitung der »Naturwissenschaften«, 5. Band. Mit 103 Abb. 329 S. Preis 21 M, geb. 22,50 M. — 6. Band. Mit 85 Abb. 378 S. Preis 24 M, geb. 25,50 M. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926.

Von der durch die Schriftleitung der »Naturwissenschaften« herausgegebenen Schriftenfolge, deren erste Bände hier bereits angezeigt wurden, sind der V. und VI. Band erschienen, die in gewohnt ausgezeichneter Weise Ueberblicke über einzelne Kapitel der naturwissenschaftlichen Forschung der Gegenwart bringen. An Gegenständen, die für die Leser dieser Zeitschrift von besonderem Interesse sein dürften, nenne ich die Photogrammetrie, der zwei Aufsätze von Seliger gewidmet sind. Im ersten (Band V) werden neben den einfachen Messungen auch Stereoskop- und Luftbildmessungen unter ausführlicher Besprechung der üblichen Apparate und Instrumente behandelt. Die Fortsetzung im VI. Bande enthält nähere Mitteilungen über die Ausführung von Aufnahmen im Dienste der Topographie und verschiedene andere Anwendungen z. B. in der Kriminalistik, in der Medizin u. s. f. Ein für die Grundlagen der Statistik interessanter Bericht ist der von K. W. F. Kohlrausch über den experimentellen Beweis für den statistischen Charakter des radioaktiven Zerfallsgesetzes im V. Band. In enger Beziehung zu der seit einiger Zeit in lebhafter Entwicklung befindlichen Lichttechnik steht der Bericht von E. Brothun über Photometrie, der im wesentlichen eine historische Darstellung bildet. Aus dem sonstigen reichen Inhalt seien noch die astronomischen Aufsätze von Vogt über den inneren Aufbau und die Entwicklung der Sterne sowie von E. Freundlich über die Energiequellen der Sterne genannt. — Die beiden Bände bilden, wie die früheren, ein jedem Freund der Naturwissenschaften willkommenes gut lesbares und dabei überaus instruktives Werk.

Mises. 848

Dr.-Ing. FRIEDRICH **MERKEL,** Privatdozent an der Technischen Hochschule Dresden. Die Grundlagen der Wärmeübertragung. Mit 88 Abb. Wärmelehre und Wärmewirtschaft in Einzeldarstellungen. Bd. IV. Verlag von Theodor Steinkopff, Dresden und Leipzig 1927. XI + 234 S. Preis geh. 13,50 M, geb. 15 M.

An einem gedrängten Leitfaden der für die Technik wichtigsten Tatsachen und Gesetze der Wärmeübertragung hat es bisher gefehlt. In der Praxis beschränkte man sich bis vor kurzem fast ausschließlich auf die Benutzung sogenannter Erfahrungskoeffizienten, wie sie von den verschiedenen Taschenbüchern angegeben werden. Der Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, hauptsächlich den Wärmeübergang zwischen festen Wänden einerseits, Flüssigkeiten oder Gasen andererseits zu behandeln. Er bringt die Ergebnisse der neueren experimentellen Arbeiten für die Berechnung von Rohrleitungen verschiedenster Art unter sorgfältiger Berücksichtigung namentlich der deutschen Forschungsarbeiten. Auf die Durchführung der mathematischen Theorie der Wärmeleitung wird nicht näher eingegangen. Durch verhältnismäßig sehr zahlreiche Abbildungen wird die Verwendbarkeit des Buches für die Praxis gesteigert.

Mises. 848

Dr.-Ing. J. **GEIGER,** Oberingenieur, Augsburg. Mechanische Schwingungen und ihre Messung. Mit 290 Textabbildungen und 2 Tafeln. Verlag von Julius Springer, Berlin 1927. XII + 305 S. Preis 24 M.

Die stoffliche Abgrenzung für dieses Buch, das aus Bedürfnissen der Praxis entstanden ist, läßt sich aus dem Titel nicht ohne weiteres entnehmen. Man könnte sie vielleicht am besten dahin charakterisieren, daß es sich um diejenigen mechanischen Schwingungsvorgänge handelt, die sich unmittelbar oder auf Grund von entsprechenden Vereinfachungen als Schwingungen mit einem Freiheitsgrad darstellen lassen. Es ist zwar auch von den Regler-Pendelungen die Rede, die ein Aggregat von Maschine und Zentrifugalregulator aufweist, ja wohl auch von den Schwingungen eines mit Schlingertank ausgerüsteten Schiffes, aber diese, übrigens sehr kurzen, Bemerkungen werden den eigentlichen Schwierigkeiten der Probleme in keiner Weise gerecht. Zumindest ein Hinweis auf die Literaturstellen, an denen eine sachgemäße Behandlung dieser Erscheinungen zu finden ist, hätte man erwarten dürfen. Was der Verf. zu diesem Gegenstande beiträgt, ist wesentlich nur eine äußerliche Beschreibung der Vorgänge, die nicht dazu ausreicht, die für die Technik grundlegenden Fragen zu ent-

scheiden. Etwas eingehender, aber auch nicht unter Heranziehung aller erforderlichen theoretischen Hilfsmittel, beschäftigt sich das Buch mit den Schwingungen der hin- und hergehenden Massen von Kolbenmaschinen. Der wertvollste Teil des Werkes ist jedenfalls der, der sich mit der Beschreibung des Verhaltens von Meßinstrumenten und der praktischen, experimentellen Untersuchung von Schwingungen beschäftigt. Hierüber fehlte bisher eine ausführlichere zusammenfassende Darstellung. Auch hat der Verf. hier Gelegenheit, seine eigenen in der Praxis gewonnenen reichen Erfahrungen zu verwerten, die seinem Buch unbestreitbaren Wert verleihen. Mises. 848

Dr. LUDWIG **BIEBERBACH,** o. ö. Prof. an der Universität Berlin. Einführung in die konforme Abbildung. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 38 Figuren. Sammlung Göschen Nr. 768. Verlag von Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1927. 131 S. Preis 1,50 M.

Bei der gründlichen Neubearbeitung des Büchleins sind einige Stellen, die in der ersten Auflage Einwänden ausgesetzt waren, entsprechend geändert worden. In der vorliegenden Fassung bildet das kleine Werk eine vorzügliche Einführung in die modernste mathematische Theorie der konformen Abbildung.

Mises. 848

L. GUSTAVE **DU PASQUIER,** Diplomé de l'Ecole fédérale, Docteur ès sciences, Professeur de mathématiques supérieurs à l'Université de Neuchâtel. Le Calcul des Probabilités. Son Evolution mathématique et philosophique. Librairie Scientifique J. Hermann, Paris 1926. XXI + 304 S. Preis 49 Frs.

Das vorliegende Buch soll kein Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung sein, sondern die Entwicklung der hauptsächlichsten Ideen die der Wahrscheinlichkeitstheorie im Laufe der Zeit zugrunde gelegt wurden, darstellen. Der Verf. beginnt mit einer kurzen historischen Uebersicht und gibt dann in Kürze eine knappe Darstellung der elementaren Aufgaben. Mit größerer Ausführlichkeit wird das Bernoullische Problem und eine Reihe damit zusammenhängender Fragen behandelt, wobei der Verf. nicht über den Standpunkt hinausgeht, der in den landläufigen Lehrbüchern der letzten Jahrzehnte vertreten wird. Vom fünften Kapitel an wendet er sich einer eingehenden Besprechung der neueren Auffassungen zu. Er bringt, in zum Teil wörtlichen Wiedergaben aus den betreffenden Originalarbeiten, Berichte über die sog. logische Theorie von Kries, über die geistreichen Aeußerungen Poincarés, über das kürzlich erschienene Buch von F. Urban, über die Häufigkeitstheorie, die v. Mises ausgebaut hat, und anderes. Auf tieferliegende mathematische Schwierigkeiten wird wenig eingegangen. Das Buch würde an Wert als Ueberblick über die mannigfachen Versuche zur logischen Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie gewinnen, wenn es literarisch exakter gearbeitet wäre, d. h. die Herkunft der einzelnen dargestellten Theorien und die Quellen, aus denen die Berichte geschöpft sind, deutlicher erkennen ließe.

Mises. 841

Ferner sind folgende Werke bei der Schriftleitung eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Prof. Dr.-Ing. MAX **ENSSLIN,** an der Höheren Maschinenbauschule Esslingen. Elastizitätslehre für Ingenieure II. Mit 44 Fig. Samml. Göschen Nr. 957. Verlag von Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1927. 120 S. Preis 1,50 *M*.

Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen. Herausgegeben von Professor Dr. Th. v. Kármán. Heft 5 (76 S.), Preis 6,90 *M*; Heft 6 (50 S.), Preis 7,50 *M*; Heft 7 (62 S.), Preis 7,50 *M*. Julius Springer, Berlin 1926, 1927, 1927.

Ing. K. **KLEPPISCH,** Willkür oder mathematische Ueberlegung beim Bau der Cheopspyramide? Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin 1927. 38 S. Preis 1 *M*.

Dr. WILLI **KÖNIG,** Leiter der Wetterdienststelle Berlin. Grundzüge der Meteorologie. Mathem. Physik. Bibliothek Bd. 70. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1927. 54 S. Preis kart. 1,20 *M*.

Prof. Dr. H. A. **LORENTZ.** Vorlesungen über theoretische Physik an der Universität Leiden. I. Theorie der Strahlung. Bearbeitet von Prof. Dr. A. D. Fokker. Nach der zweiten holländischen Auflage ins Deutsche übersetzt von Dr. G. L. De Haas-Lorentz. Ak. Verlagsgesellschaft m. b. H. 1927. X + 81 S. Preis 7,80 *M*.

G. **MAHLER,** Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Ulm. Physikalische Formelsammlung. Fünfte, völlig umgearbeitete Auflage, besorgt von Prof. K. Mahler, Studienrat an der Oberrealschule Aalen in Württemberg. Mit 71 Fig. Samml. Göschen 136. 162 S. Preis 1,50 *M*.

NACHRICHTEN

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Werkstofftagung.

Im Rahmen der Werkstofftagung, die vom 22. Oktober bis 13. November in Berlin stattfand, hielt die Gesellschaft zwei überaus reich besuchte Sitzungen am 28. Oktober ab. Es sprachen am Vormittag unter dem Vorsitz von L. Prandtl und H. Lorenz:

M. Bergsträsser-Dresden: Versuche mit rechteckigen Platten unter Einzelkraftbelastung. — Aussprache: Roš, Reißner, Gehler, Geckeler.

J. W. Geckeler-Jena: Unelastische Knickung von Zylindern, Knickung von gewölbten Schalen. — Aussprache: v. Mises.

W. Lode-Göttingen: Versuche über das Fließen der Metalle. — Aussprache: v. Mises, Prandtl, Laszlo, Gehler, Roš.

E. Schmidt-Frankfurt a. M.: Versuche an Einzelkristallen. — Aussprache: Prandtl.

In der Nachmittagssitzung unter Vorsitz von R. v. Mises und L. Föppl:

L. Prandtl-Göttingen: Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper. — Aussprache: Becker, Körber.

W. Gehler-Dresden: Die Nietverbindung als plastisches Problem. — Aussprache: Lode, Nádai.

H. Reißner-Charlottenburg: Spannungsverteilung erzeugt durch eine Nietkraft. — Aussprache: Trmpe.

E. Lehr-Darmstadt: Die Arbeitsaufnahme des Materialgefüges bei Schwingungsbeanspruchung und ihre Beziehungen zur Ermüdungsgrenze und Oberflächenempfindlichkeit. — Aussprache: Gehler, Frommer, Reißner.

F. Lászlo-Mülheim/Ruhr: Die Kerbe. — Aussprache: Lehr.

Die Veranstaltung, an der auch eine große Zahl von Gästen, darunter viele Ausländer, teilnahm, verlief überaus anregend und kann als ein voller Erfolg der Gesellschaft bezeichnet werden.

Prager Mitglieder.

Die Prager Mitglieder der Gesellschaft haben sich zu einer freien Vereinigung zwecks Veranstaltung von Vorträgen in Prag zusammengeschlossen. Als erster spricht Hr. Th. Pöschl über »Einrichtungen zur Pflege der angewandten Mathematik und Mechanik an deutschen Hochschulen und ihre Bedeutung«.

Ortsgruppe Berlin.

In der ersten Sitzung des neuen Geschäftsjahres am 25. November sprachen: R. Sonntag-Friedrichshagen: »Die Schubspannungen in konischen Trägern von homogenem und inhomogenem Baustoff« und E. Schwerin-Berlin: »Die Dampfdruck-Biegespannungen in den Schaufelgruppen von Turbinen«.

Ortsgruppe Göttingen.

In der Sitzung am 7. Dezember sprach: L. Prandtl-Göttingen über »Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper«.

Mitteilung der Geschäftsstelle.

In diesen Tagen geht den Mitgliedern der Jahresbericht über das Geschäftsjahr 1926/27 und der ausführliche Bericht über die Kissinger Tagung (Sonderdruck aus dem vorliegenden Heft) zu. Seit dem Abschluß des Berichts hat sich die Zahl der Mitglieder um 23 erhöht, so daß sie heute 345 beträgt.

Jahrhundertfeier der Technischen Hochschule Dresden. Im kommenden Jahre begeht die Technische Hochschule Dresden die Feier ihres 100jährigen Bestehens. Hierfür sind die Tage vom Montag, den 4. bis Mittwoch, den 6. Juni 1928 (in der Woche nach dem Pfingstfest) in Aussicht genommen.

In Verbindung mit der Jahrhundertfeier wird durch die »Dresdner Jahresschau« im Jahre 1928 eine Ausstellung »Die technische Stadt« veranstaltet, deren wissenschaftlicher Teil die Erziehung des Menschen in der Technik und durch die Technik zum Gegenstande haben wird.

Bereits heute bittet die Technische Hochschule, daß ehemalige Studierende, die an der Festfeier teilzunehmen gedenken, bis zum Jahresschluß ihre Anschriften und Wünsche dem Ausschuß für die Jahrhundertfeier, Dresden-24, George-Bähr-Straße 1, Zimmer Nr. 77, mitteilen.

Persönliches. Hr. Prof. Dr. S. Timoshenko, bisher in der Versuchsabteilung der Westinghouse Comp. in Pittsburg, hat eine Forschungsprofessur für angewandte Mechanik an der Universität Michigan erhalten.

Herr Prof. Dr.-Ing. A. Nádai aus Göttingen ist als Nachfolger von Prof. Timoshenko vorübergehend in das Research Department der Westinghouse Comp. eingetreten.

Zum o. Prof. der Mechanik an der Technischen Hochschule in Karlsruhe (Nachfolge von K. v. Sanden) ist der o. Prof. an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag. Dr. Th. Pöschl, ernannt worden. 860

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Zur Theorie der zylindrischen Schalen und Bogenträger. Herr Pöschl (dieser Band, S. 189 bis 198) vergleicht die bekannte Theorie krummer Stäbe mit der zweidimensionalen Theorie des Kreisrings und kontrolliert sie am Beispiel des Halbkreises unter Flüssigkeitsdruck, indem er die dort mit S und G bezeichneten Spannungsresultierenden berechnet. Nun ist aber gerade dieses Beispiel statisch bestimmt. Der Randwert von S berechnet sich aus der Vertikalkomponentengleichung und man kann dann, da G und N am Rand verschwinden, die Werte des Biegungsmomentes und der Zug- resp. Schubkraft für jeden beliebigen Querschnitt berechnen. Tut man das für den Querschnitt $\vartheta = 45^0$, so erhält man die auf S. 198 in der fünftletzten Zeile angegebenen Werte, die man natürlich auch aus des Verfassers eigenen Gleichungen S. 194 ermitteln kann. Diese Resultate sind sonach streng gültig. Sie sind na-

türlich ganz unabhängig von den speziellen Annahmen über die Deformation oder die Spannungsverteilung über einen Querschnitt, welche die Näherungstheorien kennzeichnen. Ebenso selbstverständlich ist es, daß sie sich auch als Folge der Ansätze (24) ergeben, da sie ja bloß Ausdruck des Gleichgewichtes eines Stabstückes sind. Wenn Hr. Pöschl aus der zweidimensionalen Theorie nicht genau dasselbe erhält, so liegt das an der dort benutzten Methode der Fourier-Entwicklung. Das Verhältnis h/R spielt im Ausdruck für G überhaupt keine Rolle. Die Resultate der eindimensionalen angenäherten Theorie S. 198 sind exakt richtig, die darüber stehenden der zweidimensionalen Theorie sind Näherungen.

Auch die Bemerkung des Hrn. Weber-Dortmund (dieser Band S. 420) scheint mir daher nicht das Richtige zu treffen.

Zürich. E. Meißner. 855

* * *

Erwiderung. Nach der Zuschrift des Herrn Meißner-Zürich scheint das von mir gewählte Beispiel in der Tat nicht geeignet, um den gewünschten Vergleich zwischen den Aussagen der eindimensionalen und zweidimensionalen Theorie zu ermöglichen. Es wäre daher vorteilhaft, ein anderes Beispiel durchzurechnen, das von diesem Mangel frei ist. Ich hoffe, bei späterer Gelegenheit noch einmal auf diese Frage zurückzukommen.

Prag, Nov. 1927. T. Pöschl. 855a

Ueber die Strömungsvorgänge um Kreiszylinder. Die von Hrn. Ono in seinem Aufsatz S. 9 bis 12 dieses Bandes vorgeschlagene Vereinfachung der v. Kármán-Pohlhausenschen Berechnung der laminaren Grenzschicht (vergl. diese Zeitschrift Bd. 1 (1921), S. 235 ff.) ist nicht korrekt; denn es ist nicht möglich, aus der Formel (3) für die Koeffizienten des Geschwindigkeitsprofiles in der Grenzschicht, die von Druckfehlern befreit und nach einer kleinen Umformung lautet:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{U}{\delta}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\frac{\delta^2}{\nu}\frac{dU}{dx}\right),$$

$$a_2 = -\frac{1}{2\nu}U\frac{dU}{dx},$$

$$a_3 = \frac{U}{\delta^3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{\delta^2}{\nu}\frac{dU}{dx}\right)$$

zu der Annäherung von (5)

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{3}{2}\frac{U}{\delta}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{U}{2\delta^3}$$

überzugehen. Damit vernachlässigt man nämlich Glieder der Größenordnung $\frac{\delta^2 R}{r^2}$ (δ Grenzschichtdicke, R auf den Zylinderradius r bezogene Reynoldssche Zahl) gegen 1, was trotz der Kleinheit von δ nicht erlaubt ist, da $\delta \sim \frac{r}{\sqrt{R}}$ ist, wie allgemein bekannt ist und sogar aus der Rechnung von Ono (cf. (8)) folgt.

2. Zu Onos Berechnung der turbulenten Grenzschicht muß bemerkt werden, daß er mit einer sehr bedenklichen Uebertragung der Gesetze der Strömung ohne Druckgefälle (an der ebenen Platte) auf solche mit Druckgefälle (am Kreiszylinder) arbeitet.

Göttingen. W. Tollmien. 852

* * *

Erwiderung. Auf die sehr wertvolle Kritik des Hrn. Dr. Tollmien habe ich Nachstehendes zu erwidern:

1. Im Falle der Kreiszylinderströmung (mit Potential) betrifft die Vernachlässigung nicht die Glieder von der Größenordnung $\frac{\delta^2 R}{r^2}$, wie Hr. Tollmien meint, sondern $\frac{\delta^2 R}{r^2}\cos\theta$ (Bedeutung von θ siehe meinen Aufsatz).

Im Bereich von $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ ist die Behauptung von Hrn. Tollmien ganz richtig. Aber im Bereich, wo die Grenzschichtdicke eine Größenordnung von $\frac{r}{\sqrt{R}}$ hat (d. h. $\theta = \frac{\pi}{2}$), ist meine Vernachlässigung ganz richtig.

Im ganzen Bereich von $\theta = 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ kann die Annahme für die Geschwindigkeit (3) nicht korrekt sein, aber wie meine Rechnung zeigt, verhält sich die Grenzschichtdicke wie $\frac{r}{\sqrt{R}}\sqrt{\theta}$ (wieder annäherungsweise)

Dieser Wert von δ gibt

$$\frac{\delta^2 R}{r^2}\cos\theta = \theta \times \cos\theta.$$

Dieses zeigt, daß meine Vernachlässigung nur im Bereich $\theta \sim \frac{\pi}{4}$ nicht erlaubt ist.

2. Es besteht bis heute noch eine Unsicherheit darüber, ob die Ergebnisse bei ebenen Platten auf solche mit Druckgefälle direkt übertragen werden dürfen. Meine letzteren Untersuchungen scheinen aber Bestätigungen hierfür zu geben. Ich werde demnächst einen Bericht darüber veröffentlichen.

Kobe. M. Ono. 852a

(Redaktionsschluß 17. Dezember 1927.)

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.

Library

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von L. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, L. PRANDTL-Göttingen, H. REISSNER-Charlottenburg und R. RÜDENBERG-Berlin

:: Band 7 :: :: Heft 6 ::

Dezember 1927 Seite 421 bis 508

Mit den Vorträgen der Kissinger Versammlung

I N H A L T:

Vorträge der Kissinger Versammlung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik

HAUPTAUFSÄTZE:

KÖRNER, Zur statischen Berechnung der Achsenregler / LÖBELL, Ein Beitrag zur Bestimmung der Deformationen einer elastischen Membran / HUBER, Über eine Randwertaufgabe bei der verallgemeinerten Wärmeleitungs-Gleichung / BERNSTEIN, Analyse aperiodischer trigonometrischer Reihen / v. DOBBELER, Vierskalige Nomogramme

KLEINE MITTEILUNGEN

BUCHBESPRECHUNGEN

NACHRICHTEN

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

V·D·I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN NW 7

WICHTIGE NEUERSCHEINUNGEN

Dr. phil. Fritz Wicke

EINFÜHRUNG IN DIE HÖHERE MATHEMATIK

Unter besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse des Ingenieurs

Erster Band: Mit den Abbildungen 1 bis 231 und einer Tafel / 1927 / gebunden RM. 24.–
Zweiter Band: Mit den Abbildungen 232 bis 404 / 1927 / gebunden RM. 24.–

Der große Wert des Buches besteht vor allem darin, daß der Verfasser nirgends auf Betonung systematischer Reinheit und Ausschließlichkeit ausgeht, sondern der Hauptwert wird auf vielseitige Ausnutzung aller mathematischen Mittel zur Bewältigung praktischer Aufgaben gelegt. Gerade deshalb bietet das Werk dem Mathematiker manche Anregungen, zumal durch die zahlreich gestellten und gelösten Aufgaben. Es dient ferner der theoretischen Ausbildung des Praktikers, dem es ein Führer und Nachschlagebuch sein will.

Aus dem Inhalt der beiden Bände:

Das Differenzieren / Das Integrieren / Analytische Geometrie der Ebene / Analytische Geometrie des Raumes / Von den Reihen / Die Differentialgleichungen / Analytische Geometrie des Raumes / Von den Reihen / Die Differentialgleichungen.

Dipl.-Ing. H. Winkel

FESTIGKEITSLEHRE FÜR INGENIEURE

Mit 363 Textabbildungen / Nach dem Tode des Verfassers bearbeitet von Dr.-Ing. K. Lachmann 1927 / gebunden RM. 26.–

Das Buch umfaßt das Gesamtgebiet der Festigkeitslehre. Die verschiedenen Arten der Festigkeit (Zug, Druck, Biegung, Drehung, Schub, Knickung) werden eingehend behandelt. Besonders wertvoll ist die ausführliche Angabe der benutzten Literatur, die es dem Leser ermöglicht, sich in das Studium einzelner Probleme zu vertiefen. K. Lachmann hat in dankenswerter Weise das Werk im Sinne des kurz vor Beendigung des Buches verstorbenen Verfassers zu Ende geführt.
Das Buch will den Zweck erfüllen, dem Studierenden ein Führer und dem Ingenieur ein Helfer in der Praxis zu sein.

Die Bücher sind zu beziehen durch die

VDI-Buchhandlung, Berlin NW7, Ingenieurhaus

A. W. FABER

"CASTELL"

◇ RECHEN-STÄBE ◇

Neben dem normalen technischen Rechenstabe werden folgende Spezialrechenstäbe für Mathematiker, Physiker, Ingenieure hergestellt:

375 (System Rietz) mit kubischer Teilung: liefert a^3, $\sqrt[3]{a}$, $a^{2/3}$, $a^{3/2}$ mit einer Läuferstellung.

376 und 387 mit kubischer und reziproker Teilung. Bei Stab Nr. 376 ist die gleichförmige Teilung zum Ablesen der Logarithmen auf der Rückseite des Schiebers, bei Stab Nr. 387 auf der Vorderseite des Stabes. Nr. 387 hat eine genauere Sinus- und Tangensteilung. Beide Stäbe liefern a^3, $\sqrt[3]{a}$, $a^{2/3}$, $a^{3/2}$, $a \cdot b \cdot c$, und $a:(b \cdot c)$ mit einer Schiebersteilung, ferner zahllose höhere Potenzen und Wurzeln. Quadratische und kubische Gleichungen werden leicht durch Probieren gelöst.

378 mit neuer log-log-Teilung; liefert alle Potenzen und Wurzeln von e, die natürlichen Logarithmen werden abgelesen, alle Potenzen und Wurzeln mit gebrochenem Exponenten werden mit einer Schieberstellung erhalten, ebenso Spannungsabfall, Leitungswiderstand, Leitungsgewicht, Wirkungsgrade mit nur einer Schieberstellung.

Diese Rechenstäbe werden in normaler Länge (25 cm), halber Länge und doppelter Länge geliefert.

Logarithmische Maßstäbe in allen Teilungslängen für das Auftragen von Koordinaten bei Nomogrammen, Fluchtlinientafeln u. ä. als praktisches, zeitsparendes Hilfsmittel.

A. W. FABER gegr. 1761 ✱ "CASTELL" Bleistiftfabrik
Stein bei Nürnberg / Rechenstabfabrik in Geroldsgrün (Obfrk.)

Bezugsbedingungen: Die „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" erscheint jährlich in 6 Heften (am 5. Februar, 5. April, 5. Juni usw.) und kann durch den Verlag und den Buchhandel bezogen werden. Der Bezug der Zeitschrift läuft und erneuert sich für das Inland von Halbjahr zu Halbjahr und für das Ausland von Jahr zu Jahr. Abbestellungen sind 4 Wochen vor Halbjahres- bezw. Jahresschluß einzureichen. Die Zustellung der Zeitschrift wird durch Kreuzband vorgenommen.

Die Bezugsgebühren betragen:

Inland (einschließlich Danzig, Memel- und Saargebiet):
Jährlich RM. 24.—, halbjährlich RM. 12.— für Mitglieder des VdI, der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik RM. 21,60, bezw. RM. 10.80. Einzelheftpreis RM. 5,—, für Mitglieder RM. 4,50.

Ausland mit vollem Drucksachenporto (Vereinigte Staaten von Amerika, Australischer Bund, Bolivien, Britisch-Indien, China, Dänemark, Großbritannien, Italien, Japan, Kanada, Niederländisch-Indien, Norwegen, Peru, Polen, Schweden, Schweiz):
Jährlich RM. 25,80, für Mitglieder der genannten Vereine RM. 23,40 einschließl. der Portokosten

Uebriges Ausland mit ermäßigtem Drucksachenporto:
Jährlich RM. 25,—, für Mitglieder der genannten Vereine RM. 22,60 einschließl. der Portokosten.
(Zahlungen aus Oesterreich auf unser Postsparkassenkonto Wien 174439 erbeten.

Erfüllungsort: Berlin, Gerichtsstand: Berlin-Mitte. — Notwendig werdende Nachforderungen vorbehalten

Anzeigenpreise

1/1	1/2	1/4	1/8	Seite
188×210mm	188×104mm	65×104mm	65×52mm	Reichsmark
160,—	90,—	50,—	30,—	

Rabatt: Bei 6 Jahresaufnahmen 10 vH. Für Vorzugsseiten gelten besondere Preise.

Der Verlag behält sich vor, die Aufnahme von Anzeigen und Beilagen ohne Angabe von Gründen abzulehnen und laufende Aufträge einzustellen.

Annahmeschluß: 14 Tage vor Erscheinen der Zeitschrift.

VDI-VERLAG G. M. B. H., BERLIN NW 7, DOROTHEENSTR. 40
Fernsprecher: Merkur 3126-27, 4483-84, 5460, 6104, 6171, 7454. Postscheckkonto: Berlin 102373.
Drahtanschrift: Ingenieurverlag. Bankkonto.: Dresdner Bank, Dep.-Kasse F, Spittelmarkt.
Geschäftszeit: 8 bis 4¼ Uhr. Sonnabends bis 1 Uhr.

Alle Zuschriften, die den wissenschaftlichen Inhalt der Zeitschrift betreffen, sind an den Herausgeber, Professor Dr. v. Mises, Berlin NW 23, Siegmundshof 9, alle übrigen Zuschriften an den Verlag zu richten.

HÖHERE MATHEMATIK UND DOCH VERSTÄNDLICH

v. Prof. S. P. Thompson, aus dem englischen übertragen von Diplom-Kaufmann Clusius

Eine leichtfaßliche Einführung in die Differential- und Integralrechnung für Chemiker, Biologen und Volkswirtschaftler

Maßgebend für die Gesamtanlage des Buches ist der Gedanke, die höhere Mathematik lediglich als Hilfswissenschaft für andere Fächer anzusehen, also lediglich praktische Mathematik zu bieten, wobei immer wieder betont wird, daß das für die meisten Anwendungen tatsächlich Erforderliche sich unmittelbar an die Regeln des elementaren Rechnens anschließt und daß nur eine gewisse Erweiterung schon geläufiger Begriffe, nicht aber das Eindringen in eine völlig neue, abstrakte Ideenwelt erforderlich ist. Der außerordentliche Erfolg des Buches machte bereits nach Jahresfrist die soeben erschienene 2. Auflage notwendig. Sie wurde gegenüber der 1. Auflage nicht wesentlich geändert, enthält aber doch verschiedene Verbesserungen und Ergänzungen.

Zweite verbesserte Auflage / 69 Abbildungen 1927 — Preis 6.80 RM.

DARSTELLENDE GEOMETRIE FÜR MASCHINENINGENIEURE

von Dr. M. Grossmann, Professor an der Eidg. Technisch. Hochschule in Zürich

Das Buch eignet sich nicht nur für den werdenden Ingenieur, sondern soll auch dem Fachmann, sei er nun Architekt, Maschineningenieur, Mathematiker oder Physiker, von Nutzen sein. Von der Tatsache ausgehend, daß die Vorstellungswelt des Technikers von der des Mathematikers grundverschieden ist, führt der Verfasser den Leser in die Kenntnisse und Fähigkeiten der Formgebung im Maschinenbau ein. Verschiedene Fragen, die in den vorliegenden Lehrbüchern der darstellenden Geometrie behandelt sind, wurden weggelassen; durch bestimmte Stoffauswahl und Darstellungsmethoden wird hier grundsätzlich Neues geboten. Das Buch gehört in die Hand eines jeden Ingenieurs, der in das Gebiet der darstellenden Geometrie eindringen will.

Mit 260 Abbildungen. 1927 / Geb. 16,50 RM.

Bestellungen bitten wir zu richten an

VDI-Buchhandlung, Berlin NW 7, Ingenieurhaus

Zweiggeschäft: NW 7, Neue Wilhelmstraße 4

Postscheckkonto: Berlin 16735

1927

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

VOLS I-XIX

1921-39

Vol 8

UNIVERSITY MICROFILMS